FTEXT数学B

まえがき

FTEXT 教科書シリーズは，「入門から大学教養課程まで使える教科書」をコンセプトに編集されたテキストです．もちろん，その間の最大の山場である大学受験にも対応できるよう，工夫が凝らされた教科書でもあります．

この教科書には次のような特徴があります．

① 綿密なクロスリファレンス(ページ参照)をつけた
② 重要項目を網羅した索引を巻末に載せた
③ 現代数学の研究成果をとり入れた編集を心がけた
④ 大学受験に対応できるテクニカルな内容も盛り込んだ
⑤ 高校カリキュラムをこえる高度な内容も体系的な理解に必要ならば取り入れた
⑥ 指導要領旧過程の内容も必要ならば取り入れた
⑦ レベルの高いものには星印(★)をつけ学習を後回しにできるようにした
⑧ 例題を「例題」と「暗記例題」に分け，問題に対する意識のもち方を区別できるようにした
⑨ ていねいで豊富な図版を用意した
⑩ どの問題にも完全な解答をつけた
⑪ 各節のはじめには概要をつけ学習の指針となるようにした
⑫ 必要な内容ならば繰り返しをいとわず掲載した
⑬ 英語の文献で学ぶようになったときの手助けになるよう英語のルビを載せた
⑭ ふきだし💬で学習のコツを載せた
⑮ ネットの掲示板で質問ができる (http://www.ftext.org/)

この教科書を利用することにより，自分の学ぼうとする知識にはどのような意味があり，全体の中でどういう位置付けにあるのかを把握することができます．この教科書は皆さんが身につける知識の地図となるわけです．従来の問題暗記型の勉強ではなく，体系的に知識を整理していこうと考える人にとって，この教科書はきっと最適のパートナーになるでしょう．一度読むだけでは理解できない部分もあるでしょうから，機会あるごとに何度も復習し，自分のものにしていってください．

目次

第 1 章　数列の一般項と和　1

第 2 章 漸化式 57

第 3 章 数学的帰納法 93

第 4 章 ベクトルの定義と基本演算 107

第 5 章 平面ベクトルと平面図形 125

第 6 章 空間ベクトルの演算 167

第 7 章 空間ベクトルと空間図形 181

凡例

1. 影付きの四角

これは，数学の定義(約束事)や定理(導かれた大切な話)をまとめるために使われています．書いてあることを理解するだけでなく，後で参照されることが多いので覚えてしまうことが大切です.

《例》

有理数

整数 a と 0 でない整数 b によって $\dfrac{a}{b}$ の形で表せる数を，**有理数**という.

2. 例題

本文に書かれた内容の理解を助けるため，例題があります．簡単な計算問題から骨のある問題まで，さまざまな問題が用意してあります．どの例題も次のステップに進むのに重要な鍵となっていますので，理解してから先に進むように心がけてください．すべての例題にはタイトルが付いています．例題を解き終えた後，皆さんが身に付けた知識が，その例題のタイトル通りのものか確認してみてください.

《例》

【例題：数の分類】

次の実数について，以下の問に答えよ.

3， -2，0，$\dfrac{2}{5}$， $-\dfrac{2}{5}$， $\sqrt{3}$，$1.\dot{5}\dot{2}$，$\dfrac{36}{6}$， $-\sqrt{16}$，$\left(\sqrt{5}\right)^2$ ，π^2

(1) 自然数を選べ. (2) 整数を選べ. (3) 有理数を選べ. (4) 無理数を選べ.

3. 暗記例題

上の例題の中には，数学の根っこを支えるような重要なものもあります．これらの例題は，理解するだけでは不十分で，その解答に用いられた論法も大切なものです．このような例題は，問題ごと覚えてしまう気持ちで取り組みましょう．暗記マークのついた例題は，記憶することまで意識してください．

《例》

【暗記：$\sqrt{2}$ は有理数ではないことの証明】

$\sqrt{2}$ が有理数でないことを証明せよ．

4. 補足

本文中，ところどころに💬マーク付きの文章があります．このマークのついた文章は，知識を理解するためのポイントや，知識の覚え方などが書かれています．世の中には，難しいことでもすぐに覚えられる人や，一度覚えたことを忘れずにずっと覚えていられる人がいます．このマーク付いた文章をうまく利用することによって，このような人たちと同じような振る舞いができるようになります．試してみてください．

ギリシア文字の読み方

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	beta	ベータ	B	β
gamma	ガンマ	Γ	γ	delta	デルタ	Δ	δ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	zeta	ゼータ	Z	ζ
eta	イータ	H	η	theta	シータ	Θ	θ, ϑ
iota	イオタ	I	ι	kappa	カッパ	K	κ
lambda	ラムダ	Λ	λ	mu	ムー	M	μ
nu	ヌー	N	ν	omicron	オミクロン	O	o
xi	クシー	Ξ	ξ	pi	パイ	Π	π, ϖ
rho	ロー	P	ρ, ϱ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
tau	タウ	T	τ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
phi	ファイ	Φ	ϕ, φ	chi	カイ	X	χ
psi	プシー	Ψ	ψ	omega	オメガ	Ω	ω

第 1 章

数列の一般項と和

§ 1.1

数列とは何か

ここでは，数列の基本的な考え方を知り，数列の利用法についての全体像をみる．

1.1.1　数列の定義

■数列とは何か

人にプレゼントを贈るのため，今日から少しずつ貯金をしていく例を考える．今の貯金は 0 円だとして，毎日貯金してお金をためていく．最初は少額の 1 円からスタートして，1 日ごとに 2 円ずつ金額を増やしていくことにする．つまり，次のように貯金していく．

$$\overset{\text{初日}}{1\,\text{円}},\ \overset{2\,\text{日目}}{3\,\text{円}},\ \overset{3\,\text{日目}}{5\,\text{円}},\ \overset{4\,\text{日目}}{7\,\text{円}},\ \overset{5\,\text{日目}}{9\,\text{円}},\ \overset{6\,\text{日目}}{11\,\text{円}},\ \cdots$$

この

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots$$

のように，数字をならべたものを**数列** (sequence) という．そして，数列の中の数ひとつひとつを，その数列の**項** (term) という．特に，一番はじめの項のことを**初項** (first term) といい，2 番目の項を第 2 項，3 番目の項を第 3 項，N 番目の項を第 N 項，一番最後の項を**末項** (last term) という．

一般的には，数列の各項を

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\ a_n,\ \cdots$$

のように，文字に項の番号を右下に添えて書く．また数列全体を $\{a_n\}$ と書く．

■漸化式とは何か

この数列では，n 日目（n は自然数とする）に貯金する金額を a_n で表すと

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

という関係が常に成り立つ（ここで，a_1 は初日の金額を表すので，$a_1 = 1$ である）．

実際，この式の n に 1 や 2 を代入してみると

$$a_2 = a_1 + 2$$
$$a_3 = a_2 + 2$$

となり，$a_1 = 1$ だから，$a_2 = 1 + 2 = 3$ として確かに 2 日目の貯金額が導かれる．また，$a_2 = 3$ だから，$a_3 = 3 + 2 = 5$ として 3 日目の貯金額が導かれる．

この $a_{n+1} = a_n + 2$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のように，ある項 (a_n) と別のある項 (a_{n+1}) との間に成り立つ関係式のことを，**漸化式**（ぜんかしき） (recurrence formula) という．

以上をまとめると，この数列は漸化式を用いて次のように表すことができる．

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2 \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

【例題：漸化式から数列の項を求める】

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第 5 項までを書き出せ．

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + n^2$

(2) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n + 2$

(3) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n + 2^n$

(4) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n + n$

(5) $a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$

(6) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 2}{a_n + 3}$

【解答】

(1)
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1 + 2^2 = 5$$
$$a_3 = 5 + 3^2 = 14$$
$$a_4 = 14 + 4^2 = 30$$
$$a_5 = 30 + 5^2 = 55$$

より，**1, 5, 14, 30, 55** である．

(2)
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$$
$$a_3 = 3 \cdot 8 + 2 = 26$$
$$a_4 = 3 \cdot 26 + 2 = 80$$
$$a_5 = 3 \cdot 80 + 2 = 242$$

より，**2, 8, 26, 80, 242** である．

(3)
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 5 \cdot 1 + 2 = 7$$
$$a_3 = 5 \cdot 7 + 2^2 = 39$$
$$a_4 = 5 \cdot 39 + 2^3 = 203$$
$$a_5 = 5 \cdot 203 + 2^4 = 1031$$

より，**1, 7, 39, 203, 1031** である．

(4)
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 5 \cdot 1 + 1 = 6$$
$$a_3 = 5 \cdot 6 + 2 = 32$$
$$a_4 = 5 \cdot 32 + 3 = 163$$
$$a_5 = 5 \cdot 163 + 4 = 819$$

より，**1, 6, 32, 163, 819** である．

(5)
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 5$$
$$a_3 = 5 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 13$$
$$a_4 = 5 \cdot 13 - 6 \cdot 5 = 35$$
$$a_5 = 5 \cdot 35 - 6 \cdot 13 = 97$$

より，**2, 5, 13, 35, 97** である．

(6)
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = \frac{2 \cdot 2 + 2}{2 + 3} = \frac{6}{5}$$
$$a_3 = \frac{2 \cdot \frac{6}{5} + 2}{\frac{6}{5} + 3} = \frac{\frac{22}{5}}{\frac{21}{5}} = \frac{22}{21}$$
$$a_4 = \frac{2 \cdot \frac{22}{21} + 2}{\frac{22}{21} + 3} = \frac{\frac{86}{21}}{\frac{85}{21}} = \frac{86}{85}$$
$$a_5 = \frac{2 \cdot \frac{86}{85} + 2}{\frac{86}{85} + 3} = \frac{\frac{342}{85}}{\frac{341}{85}} = \frac{342}{341}$$

より，$\mathbf{2,\ \frac{6}{5},\ \frac{22}{21},\ \frac{86}{85},\ \frac{342}{341}}$ である．

1.1.2　数列の一般項

■数列の一般項

さきほどの例では，10日目にはいったい何円貯金しなければならないだろうか？

実際に数列を書き並べて

$$\overset{\boxed{1}}{1},\ \overset{\boxed{2}}{3},\ \overset{\boxed{3}}{5},\ \overset{\boxed{4}}{7},\ \overset{\boxed{5}}{9},\ \overset{\boxed{6}}{11},\ \overset{\boxed{7}}{13},\ \overset{\boxed{8}}{15},\ \overset{\boxed{9}}{17},\ \overset{\boxed{10}}{19}$$

とすれば，19円貯金しなければならないことがわかるが，これでは20日目や50日目の貯金額を知りたいときにかなり面倒である．

そこで，別の見方を考えてみよう．

たとえば,「日にち」と「貯金額」との対応を見たときに, $\boxed{1}\times 2-1=1$ 円, $\boxed{2}\times 2-1=3$ 円, $\boxed{3}\times 2-1=5$ 円，$\cdots$ だから

$$(\text{日にち})\times 2-1=(\text{貯金額})$$

であることに気がつけば，10日目に貯金しなければならない金額 a_{10} は

$$a_{10}=10\times 2-1=19\ \text{円}$$

と求めることができる．この方法を使えば, 20日目の貯金額 a_{20} は $a_{20}=20\times 2-1=39$ 円, 50日目の貯金額 a_{50} は $a_{50}=50\times 2-1=99$ 円 と簡単に求めることができる．

さらに，n 日目の貯金額 a_n は

$$a_n=n\times 2-1=2n-1\ \text{円}$$

と表すことができる．

このように，数列の第 n 項(n 日目の貯金額)が n (n 日目)の式で表されているとき，その第 n 項を**一般項** (general term) という．一般項が求まれば，n に自然数を順次代入することによって，数列の各項を求めることができる．

【例題：数列の一般項】

数列 $\{a_n\}$ の一般項が，次の式で与えられているとき，初項から第5項までを書き出せ．

(1) $a_n=2n$　　(2) $a_n=2^n$

(3) $a_n=\dfrac{2n+1}{n}$　　(4) $a_n=\dfrac{2^n}{n+1}$

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}a_1&=2\cdot 1=2\\a_2&=2\cdot 2=4\\a_3&=2\cdot 3=6\\a_4&=2\cdot 4=8\end{aligned}$$

$$a_5 = 2 \cdot 5 = 10$$

より，**2, 4, 6, 8, 10** である．

(2)
$$a_1 = 2^1 = 2$$
$$a_2 = 2^2 = 4$$
$$a_3 = 2^3 = 8$$
$$a_4 = 2^4 = 16$$
$$a_5 = 2^5 = 32$$

より，**2, 4, 8, 16, 32** である．

(3)
$$a_1 = \frac{2+1}{1} = 3$$
$$a_2 = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$$
$$a_3 = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}$$
$$a_4 = \frac{8+1}{4} = \frac{9}{4}$$
$$a_5 = \frac{10+1}{5} = \frac{11}{5}$$

より，$\mathbf{3,\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{3},\ \frac{9}{4},\ \frac{11}{5}}$ である．

(4)
$$a_1 = \frac{2^1}{1+1} = 1$$
$$a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$
$$a_3 = \frac{2^3}{3+1} = 2$$
$$a_4 = \frac{2^4}{4+1} = \frac{16}{5}$$
$$a_5 = \frac{2^5}{5+1} = \frac{16}{3}$$

より，$\mathbf{1,\ \frac{4}{3},\ 2,\ \frac{16}{5},\ \frac{16}{3}}$ である．

1.1.3　数列の和

■数列の和

10 日に貯金しなければいけない金額はわかった．次に，10 日間で貯金できた合計金額を考えてみよう．

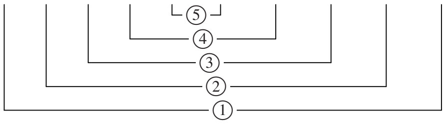
初日に 1 円，2 日目に 3 円，3 日目に 5 円，$\cdots$，10 日目に 19 円貯金するのだから，金額を順に足していくことにより

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100\ [円]$$

となり，ちょうど100円貯金できたことがわかる．

しかし，この考え方では，20日間や50日間で貯金した合計金額を知りたいときに相当面倒である．そこで，別の見方を考えてみよう．

$$S_{10} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$



上記のように両端から順にペアを組ませると，ペア同士の和が全て同じ数値「20」になることに気がつけば

$$S_{10} = 20 \times \frac{10}{2} = 100\ [円]$$

と求めることができる．（ペアの個数は，元の項数10の半分となる．）

この方法を使えば，S_{20}，S_{50} も次のように求めることができる．

$$\begin{aligned} S_{20} &= 1 + 3 + 5 + \cdots + 35 + 37 + 39 \\ &= 40 \times \frac{20}{2} = 400\ [円] \\ S_{50} &= 1 + 3 + 5 + \cdots + 95 + 97 + 99 \\ &= 100 \times \frac{50}{2} = 2500\ [円] \end{aligned}$$

さらに，n 日間で貯金できた合計金額 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-5) + (2n-3) + (2n-1) \\ &= 2n \times \frac{n}{2} = n^2\ [円] \end{aligned}$$

と表すことができる[*1]．

ここで，貯金が1万円になるまでの日数を考えると，$S_n = 10000$ という方程式を考えて

$$\begin{aligned} & S_n = 10000 \\ \Leftrightarrow\ & n^2 = 10000 \\ \therefore\ & n = 100 \end{aligned}$$

より100日間とわかる．つまり，最初1円からスタートしても3ヶ月弱で達成できる．意外と早いものだ．

[*1] $S_n = n^2$ は数列 $\{S_n\}$ の一般項という意味もある．

§ 1.2

等差数列

ここでは等差数列の一般項や和について学ぶ．等差数列の和について理解できると，「1 から 100 までの自然数の和を計算せよ」といった問題が簡単に解けるようになる．

1.2.1　等差数列の一般項

■等差数列の定義

§1.1 でとりあげた貯金の例のように，初項 a に順次，一定の数 d（**公差** (common difference) という）を加えて得られる数列のことを**等差数列** (arithmetic sequence) という．具体的に数列を書き表すと

$$\begin{tikzcd} a, \arrow[r, bend right, "+d"'] & a+d, \arrow[r, bend right, "+d"'] & a+2d, \arrow[r, bend right, "+d"'] & a+3d, \arrow[r, bend right, "+d"'] & a+4d, & \cdots \end{tikzcd}$$

となる．

また，等差数列は漸化式を用いて

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表すこともできる[*2]．

試しに，この漸化式①の n に 1，2，3 を代入すると，確かに $a+d$，$a+2d$，$a+3d$ が作られるのがわかる．

■等差数列の一般項

この等差数列の第 N 項つまり一般項 a_N は

「第 N 項は初項 a に d を $N-1$ 個加えたもの」

と考えて

$$a_N = a + (N-1)d$$

となるのはすぐにわかるだろう．

また，漸化式①から一般項 a_N を求める方法もみておこう．

[*2] 初項 a_1 の条件は必須であることに注意しよう．

STEP1

漸化式を $a_{n+1} - a_n = d$ と変形し，n に 1，2，3，$\cdots$，$N-2$，$N-1$ を代入し，得られる式を縦に並べておく．

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= d \\ a_3 - a_2 &= d \\ &\vdots \\ a_{N-1} - a_{N-2} &= d \\ a_N - a_{N-1} &= d \end{aligned}$$

STEP2

すべての式の辺々を加え合わせる．

$$\begin{array}{rl} \cancel{a_2} - a_1 &= d \\ \cancel{a_3} - \cancel{a_2} &= d \\ &\vdots \\ \cancel{a_{N-1}} - \cancel{a_{N-2}} &= d \\ +)\quad a_N - \cancel{a_{N-1}} &= d \\ \hline a_N - a_1 &= (N-1)d \end{array}$$

よって，$a_1 = a$ であることに注意して，次式を得る．

$$a_N = a + (N-1)d$$

■n と N を混同してもちいる

さきほど STEP1 で使った文字 N は「ある N 番目」という意味で用いた．ただし慣例では “N” ではなく “n” を使うので，今後このテキストでもこの慣例に従い，特別 N を使用せずに n を使うものとする．

しかし，こうすると STEP1 で「n に 1，2，3，$\cdots$，$n-2$，$n-1$ を代入」と表現されることになり「n に $n-1$ を代入する？」と誤解を招きやすい．

最初の n は 1，2，3，$\cdots$ を代入するための変数であり，後の $n-2$，$n-1$ に含まれる n は定数として用いられており，同じ n でも別物として取り扱うことに注意しよう．

等差数列の漸化式と一般項

初項 a，公差 d の等差数列の漸化式は

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

初項 a，公差 d の等差数列の一般項 a_n は

$$a_n = a + (n-1)d \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

【例題：等差数列の一般項〜その１〜】

次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．また，第 10 項を求めよ．

(1) 2，5，8，11，14，$\cdots$

(2) 100，98，96，94，92，$\cdots$

【解答】

(1) 初項が 2，公差が 3 の等差数列であり，第 n 項（一般項）は初項 a_1 に公差 d を $n-1$ 回加えることによって求められるので

$$a_n = 2 + (n-1)3 = \mathbf{3n - 1}$$

また，第 10 項は $a_{10} = 3 \cdot 10 - 1 = \mathbf{29}$ である．

◀ $\underset{\searrow_{+3}\nearrow}{2,\quad 5,}\quad 8,\quad 11,\quad 14,\quad \cdots$ 　（各項の間に $+3$）

(2) 初項が 100，公差が -2 の等差数列だから

$$a_n = 100 + (n-1) \cdot (-2) = \mathbf{-2n + 102}$$

また，第 10 項は $a_{10} = -2 \cdot 10 + 102 = \mathbf{82}$ である．

◀ 100，98，96，94，92，$\cdots$

$\searrow_{-2}\nearrow\ \searrow_{-2}\nearrow\ \searrow_{-2}\nearrow\ \searrow_{-2}\nearrow\ \searrow_{-2}\nearrow$

【例題：等差数列の一般項〜その２〜】

次の条件を満たす等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) 初項が 13，第 4 項が 22

(2) 第 3 項が 1，第 10 項が -13

【解答】

(1) 等差数列は公差が一定であるので，条件からまず公差を求めよう．初項から第 4 項までは，公差が 3 回足されるので，公差を d とすると

$$3d = a_4 - a_1 = 22 - 13 = 9$$
$$\therefore\ \ d = 3$$

◀ a_1，a_2，a_3，a_4

$\searrow_{+d}\nearrow\ \searrow_{+d}\nearrow\ \searrow_{+d}\nearrow$

◀ $d = \dfrac{a_4 - a_1}{4 - 1}$

よって，$a_n = 13 + (n-1) \cdot 3 = \mathbf{3n - 10}$ となる．

【別解】

等差数列の一般項は $a_n = a_1 + (n-1)d$ として与えられるので，問題の条件から a_1 と d の連立方程式を立てることができる．初項を a，公差を d とすると

$$a_1 = a = 13$$
$$a_4 = a + 3d = 22$$

となる．これらを連立させて解くと

$$a = 13\,,\ \ d = 3$$

よって，$a_n = 13 + (n-1)\cdot 3 = \mathbf{3}\boldsymbol{n} - \mathbf{10}$ となる．

(2) 第 3 項から第 10 項までは，公差が 7 回足されるので，公差を d とすると

$$7d = a_{10} - a_3 = -13 - 1 = -14$$
$$\therefore\ \ d = -2$$

◀ $d = \dfrac{a_{10} - a_3}{10 - 3}$

第 10 項から第 n 項までは，公差が $n-10$ 回足されるので

$$\begin{aligned} a_n &= a_{10} + (n-10)d = -13 + (n-10)\cdot(-2) \\ &= \mathbf{-2}\boldsymbol{n} + \mathbf{7} \end{aligned}$$

【別解】

初項を a，公差を d とすると

初項が 3 であるから　$a + 2d = 1$

第 10 項が -13 であるから　$a + 9d = -13$

となる．これらを連立させて解くと

$$a = 5\,,\ \ d = -2$$

よって，$a_n = 5 + (n-1)\cdot(-2) = \mathbf{-2}\boldsymbol{n} + \mathbf{7}$ となる．

【例題：等差数列の一般項〜その３〜】

第 12 項が 43，第 27 項が 223 である等差数列がある．このとき，295 はこの数列の第何項か．

【解答】

この数列の初項を a，公差を d とすると

$$a_n = a + (n-1)d$$

ここで $a_{12} = 43$，$a_{27} = 223$ であるから

$$43 = a + 11d$$
$$223 = a + 26d$$

これを解いて，$a = -89$，$d = 12$.

よって一般項 a_n は

$$a_n = -89 + (n-1) \cdot 12 = 12n - 77$$

ここで 295 が第 n 項であるとすると

$$295 = 12n - 77$$

これを解いて，$n = 32$.
したがって，295 はこの数列の**第 32 項**である.

1.2.2　等差数列の和

■等差数列の和の求めかた

ここでは，等差数列の初項 a から第 n 項までの和 S_n を求めてみよう.

STEP1

等差数列の一般項 $a_n = a + (n-1)d$ に，1，2，3，$\cdots$，$n-2$，$n-1$，n を代入して足し合わせる式を書く.

$$S_n = \overset{\boxed{1}}{a} + (a + \overset{\boxed{2}}{d}) + (a + \overset{\boxed{3}}{2}d) + \cdots + \{a + (\overset{\boxed{n-2}}{n} - 3)d\} + \{a + (\overset{\boxed{n-1}}{n} - 2)d\} + \{a + (\overset{\boxed{n}}{n} - 1)d\}$$

STEP2

この式の右辺を，逆に並べて書く.

$$S_n = \{a + (\overset{\boxed{n}}{n} - 1)d\} + \{a + (\overset{\boxed{n-1}}{n} - 2)d\} + \{a + (\overset{\boxed{n-2}}{n} - 3)d\} + \cdots + (a + \overset{\boxed{3}}{2}d) + (a + \overset{\boxed{2}}{d}) + \overset{\boxed{1}}{a}$$

STEP3

上の 2 式を縦に足し合わせる.

$$\begin{array}{llllll}
 & S_n & = a & +(a+d) & +\cdots & +\{a+(n-2)d\} & +\{a+(n-1)d\} \\
+) & S_n & = \{a+(n-1)d\} & +\{a+(n-3)d\} & +\cdots & +(a+d) & +a \\ \hline
 & 2S_n & = \{2a+(n-1)d\} & +\{2a+(n-1)d\} & +\cdots & +\{2a+(n-1)d\} & +\{2a+(n-1)d\}
\end{array}$$

右辺は全て $2a + (n-1)d$ であり，これが n 個存在するので

$$2S_n = \{2a + (n-1)d\} \times n$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

と表すことができる．これが求めたかった等差数列の初項 a から第 n 項までの和 S_n である.

なお，$2a + (n-1)d = a_1 + a_n$ より

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

と表すこともできる.

以上，等差数列の和についてまとめておこう.

等差数列の和

初項 a，公差 d の等差数列の，初項から第 n 項までの和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\} \\ &= \frac{n}{2}(a_1+a_n) \end{aligned}$$

と表せる．

等差数列の和の公式は

$$（等差数列の和）= \frac{（項数）}{2} \times \Big(（初項）+（末項）\Big)$$

と覚えておくとよい．つまり，等差数列の和は「項数」と「初項」と「末項」という 3 つの要素がわかれば求めることができる．

【例題：等差数列の和〜その１〜】

次の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．また，S_{10} を求めよ．

(1) 2，5，8，11，14，$\cdots$

(2) 100，98，96，94，92，$\cdots$

【解答】

(1) 初項が 2，公差が 3 の等差数列だから，この数列の一般項 a_n は

$$a_n = 2+(n-1)3 = 3n-1$$

よって，初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n) = \boldsymbol{\frac{n(3n+1)}{2}}$$

また，初項から第 10 項までの和 S_{10} は

$$S_{10} = \frac{10\cdot(3\cdot10+1)}{2} = \mathbf{155}$$

◀ 2，5，8，11，14，$\cdots$
+3 +3 +3 +3 +3

(2) 初項が 100，公差が -2 の等差数列だから，この数列の一般項 a_n は

$$a_n = 100+(n-1)\cdot(-2) = -2n+102$$

よって，初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n) = \boldsymbol{n(101-n)}$$

◀ 100，98，96，94，92，$\cdots$
-2 -2 -2 -2 -2

また，初項から第 10 項までの和 S_{10} は

$$S_{10} = 10 \cdot (101 - 10) = \mathbf{910}$$

【例題：等差数列の和〜その２〜】

1 から 50 までの整数のうち，次のような数の和を求めよ．

(1) 2 の倍数　　(2) 3 の倍数

(3) 2 または 3 の倍数

【解答】

(1) $A_2 = \{2,\ 4,\ 6, \cdots,\ 50\}$ は，初項 2，項数 25，末項 50 の等差数列であるから，求める和 S_2 は

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 25(2 + 50) = \mathbf{650}$$

(2) $A_3 = \{3,\ 6,\ 9, \cdots,\ 48\}$ は，初項 3，項数 16，末項 48 の等差数列であるから，求める和 S_3 は

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 16(3 + 48) = \mathbf{408}$$

(3) 2 または 3 の倍数の和 S は，$S = S_2 + S_3 - S_6$ で与えられるので，S_6 を求めればよい．$A_6 = \{6,\ 12,\ 18, \cdots,\ 48\}$ は，初項 6，項数 8，末項 48 の等差数列であるから，S_6 は

$$S_6 = \frac{1}{2} \cdot 8(6 + 48) = 216$$

よって

$$S_6 = 650 + 408 - 216 = \mathbf{842}$$

【例題：等差数列の和の最大値】

一般項 a_n が $a_n = -6n + 120$ である数列 $\{a_n\}$ について，以下の問に答えよ．

(1) 初めて負になる項は第何項目か．

(2) 初項からの和が最大になるのは，第何項目までの和か．また，その和の最大値を求めよ．

【解答】

(1) $a_n = -6n + 120$ が負になるのは

$$-6n + 120 < 0$$
$$\Leftrightarrow\ 6n > 120$$

$$\Leftrightarrow \ n > 20$$

つまり，$n \geqq 21$ のとき a_n は負となる．よって，初めて負になるのは**第 21 項目**である．

(2) (1) より，初項から第 20 項までの項は，すべて正あるいは 0 なので，S_{20} が初項からの和の最大値となる．また，$a_{20} = 0$ であるから，$S_{20} = S_{19}$ であり，こちらも最大値である．よって，和が最大になるのは，**第 19 項目または第 20 項目**である．

このとき，最大値は

$$\begin{aligned} S_{19} &= \frac{19}{2}\cdot(a_1 + a_{19}) \\ &= \frac{19}{2}\cdot(114 + 6) \\ &= \mathbf{1140} \end{aligned}$$

◀ $\begin{aligned} S_{20} &= \frac{20}{2}\cdot(a_1 + a_{20}) \\ &= \frac{20}{2}\cdot(114 + 0) \\ &= 1140 \end{aligned}$

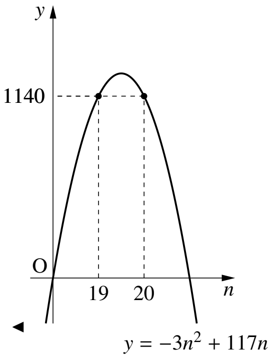
【別解】

一般項が $a_n = -6n + 120$ である等差数列の和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}\{114 + (-6n + 120)\} \\ &= \frac{1}{2}(-6n + 234) \\ &= -3n^2 + 117n \end{aligned}$$

となり，S_n が 2 次関数で与えられていることがわかる．右図のグラフより，n が整数であることに注意すると，この S_n が最大値をとるのは $\boldsymbol{n = 19,\ 20}$ のときである．

◀



§ 1.3

等比数列

等差数列は隣り合う項の差が一定の数列であった．ここでは隣り合う項の比が一定の数列「等比数列」の一般項や和について学んでいく．なお，等比数列の和について理解できると，「利率 5 %の銀行に毎年 100 万円ずつ貯金するとき，10 年目の貯金総額はいくらか」といった問題が解けるようになる．

1.3.1　等比数列の一般項

■等比数列の定義

初項 a に順次，一定の数 r（**公比** (common ratio) という）をかけて得られる数列のことを**等比数列** (geometric sequence) という．具体的に書き表すと

$$\begin{tikzcd}a, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & ar, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & ar^2, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & ar^3, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & ar^4, & \cdots\end{tikzcd}$$

となる．

また，等比数列は漸化式を用いて

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n r \ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

と表すこともできる[*3]．

試しに，この漸化式①の n に 1，2，3 を代入すると，確かに ar，ar^2，ar^3 が作られるのがわかる．

なお，次のような数列も等比数列となることに注意しておこう．

a，0，0，0，$\cdots$（初項 a，公比 0 の等比数列）

a，a，a，a，$\cdots$（初項 a，公比 1 の等比数列）

■等比数列の一般項

この等比数列の第 n 項つまり一般項 a_n は

「初項から第 n 項までには r を $n-1$ 個かける」

と考えて

$$a_n = ar^{n-1}$$

となるのはすぐにわかるだろう．

[*3] 初項 a_1 の条件は必須であることに注意しよう．

また，漸化式①から一般項 a_n を求める方法もみておこう．

STEP1

漸化式①の n に 1，2，3，⋯，$n-2$，$n-1$ を代入し，得られる式を縦に並べておく．

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 r \\ a_3 &= a_2 r \\ &\ \vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} r \\ a_n &= a_{n-1} r \end{aligned}$$

STEP2

すべての式の辺々を掛け合わせると，a_2，a_3，⋯，a_{n-1} が打ち消される．

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 r \\ a_3 &= a_2 r \\ &\ \vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} r \\ a_n &= a_{n-1} r \\ \hline a_n &= a_1 r^{n-1} \end{aligned}$$

よって，$a_1 = a$ に注意して，次式を得る．

$$a_n = ar^{n-1}$$

等比数列の漸化式と一般項

初項 a，公比 r の等比数列の漸化式は

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n r \ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

初項 a，公比 r の等比数列の一般項 a_n は

$$a_n = ar^{n-1} \ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

【例題：等比数列の一般項〜その１〜】

次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．また，第 10 項を求めよ．

(1) 2，6，18，54，162，⋯

(2) 81，-27，9，-3，1，⋯

【解答】

(1) 初項が 2，公比が 3 の等比数列であり，第 n 項（一般項）は初項 a_1 に公比 r を $n-1$ 回かけることによっ

◀ 2, 6, 18, 54, 162, ⋯
×3 ×3 ×3 ×3 ×3

て求められるので

$$a_n = \mathbf{2 \cdot 3^{n-1}}$$

また，第 10 項は $a_{10} = 2 \cdot 3^9 = \mathbf{39366}$ である．

(2) 初項が 81，公比が $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列だから

◀ $$\begin{tikzcd} 81, \arrow[r, bend right, "\times\left(-\frac{1}{3}\right)"'] & -27, \arrow[r, bend right, "\times\left(-\frac{1}{3}\right)"'] & 9, \arrow[r, bend right, "\times\left(-\frac{1}{3}\right)"'] & -3, \arrow[r, bend right, "\times\left(-\frac{1}{3}\right)"'] & 1, \ \cdots \end{tikzcd}$$

$$a_n = \mathbf{81\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

また，第 10 項は $a_{10} = 81\left(-\dfrac{1}{3}\right)^9 = \mathbf{-\dfrac{1}{243}}$ である．

【例題：等比数列の一般項〜その２〜】

次の条件を満たす等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) 初項が 2，第 4 項が -54

(2) 第 3 項が $\dfrac{3}{4}$，第 7 項が $\dfrac{3}{64}$

【解答】

(1) 等比数列は公比が一定であるので，条件からまず公比を求めよう．初項から第 4 項までは, 公比が $(4-1=)3$ 回掛けられるので，公比を r とすると

◀ $$\begin{tikzcd} a_1, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & a_2, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & a_3, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & a_4 \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} & a_1 r^3 = a_4 \\ \Leftrightarrow\ & r^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{-54}{2} = -27 \\ \therefore\ & r = -3 \end{aligned}$$

よって，$a_n = \mathbf{2(-3)^{n-1}}$ となる．

【別解】

等比数列の一般項は $a_n = a_1 r^{n-1}$ として与えられるので，問題の条件から a_1 と r の連立方程式を立てることができる．初項を a，公比を r とすると

$$a_1 = a = 2$$

$$a_4 = ar^3 = -54$$

となる．これらを連立させて解くと

$$a = 2\,,\ r = -3$$

よって，$a_n = \mathbf{2(-3)^{n-1}}$ となる．

(2) 第 3 項から第 7 項までは，公比が $(7-3=)4$ 回かけ

られるので，公比を r とすると

$$a_3r^4 = a_7$$

$$\Leftrightarrow\ r^4 = \frac{a_7}{a_3} = \frac{3}{64} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{16}$$

$$\therefore\ \ r = \pm\frac{1}{2}$$

第 3 項から第 n 項までは，公比の $n-3$ 乗がかかるので

$$\begin{aligned} a_n &= a_3r^{n-3} \\ &= \frac{3}{4}\left(\pm\frac{1}{2}\right)^{n-3} \\ &= \boldsymbol{3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ ,\ 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

【別解】

初項を a，公比を r とすると

第 3 項が $\dfrac{3}{4}$ であるから　$ar^2 = \dfrac{3}{4}$

第 7 項が $\dfrac{3}{64}$ であるから $ar^6 = \dfrac{3}{64}$

となる．これらを連立させて解くと

$$a = 3\ ,\ \ r = \pm\frac{1}{2}$$

よって，$a_n = \boldsymbol{3\left(\pm\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ となる．

1.3.2　等比数列の和

■等比数列の和の求め方

ここでは，等比数列の初項 a から第 n 項までの和 S_n を求めてみよう．$r \neq 1$ のときは次のようになる．

STEP1

等比数列の一般項 $a_n = a_1r^{n-1}$ に，1，2，3，$\cdots$，$n-2$，$n-1$，n を代入して足し合わせる式を書く．

$$S_n = \overset{\boxed{1}}{a} + \overset{\boxed{2}}{ar} + \overset{\boxed{3}}{ar^2} + \cdots + \overset{\boxed{n-2}}{ar^{n-3}} + \overset{\boxed{n-1}}{ar^{n-2}} + \overset{\boxed{n}}{ar^{n-1}}$$

STEP2

この式の辺々 r 倍した式を書く．

$$rS_n = \overset{\boxed{1}}{ar} + \overset{\boxed{2}}{ar^2} + \overset{\boxed{3}}{ar^3} + \cdots + \overset{\boxed{n-2}}{ar^{n-2}} + \overset{\boxed{n-1}}{ar^{n-1}} + \overset{\boxed{n}}{ar^n}$$

STEP3

上の 2 つの式を並べる．このとき，r 倍した式の方を右に 1 段ずらして書いておく．

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} S_n & = & a & + & ar & + & ar^2 & + & \cdots & + & ar^{n-3} & + & ar^{n-2} & + & ar^{n-1} & & \\ rS_n & = & & & ar & + & ar^2 & + & \cdots & + & ar^{n-3} & + & ar^{n-2} & + & ar^{n-1} & + & ar^n \end{array}$$

STEP4

上の式から下の式を引く．そのとき，各項のかたまりを崩さないようにする．

$$\begin{array}{crcccccccccccccccc} & S_n & = & a & + & ar & + & ar^2 & + & \cdots & + & ar^{n-3} & + & ar^{n-2} & + & ar^{n-1} & & \\ -) & rS_n & = & & & ar & + & ar^2 & + & \cdots & + & ar^{n-3} & + & ar^{n-2} & + & ar^{n-1} & + & ar^n \\ \hline & (1-r)S_n & = & a & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & ar^n \end{array}$$

$r \neq 1$ ならば，この式の両辺を $1-r$ で割ることができるので，$(1-r)S_n = a(1-r^n)$ より

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \ \left(= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \right)$$

を得る．

また，$r=1$ のときは，$S_n = \overbrace{a+a+a+\cdots+a+a}^{n\text{ 個}} = an$ となる．

以上，まとめておこう．

等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列の，初項から第 n 項までの和 S_n は

(1) $r \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\ &= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \end{aligned}$$

(2) $r=1$ のとき $S_n = an$

この式は

$$(\text{等比数列の和}) = \frac{(\text{初項}) \times \left(1 - (\text{公比})^{(\text{項数})}\right)}{1 - (\text{公比})}$$

と覚えておくとよい．つまり，等比数列の和は「初項」と「公比」と「項数」という 3 つの要素がわかれば簡単に計算することができる．

【例題：等比数列の和〜その１〜】

次の等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．また，S_6 を求めよ．

(1) 2，6，18，54，162，$\cdots$

(2) 81，-27，9，-3，1，$\cdots$

【解答】

(1) 初項が 2，公比が 3 の等比数列だから，初項から第 n

◀ 2，6，18，54，162，$\cdots$
×3　×3　×3　×3　×3

項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{2(3^n-1)}{3-1} = \mathbf{3^n-1}$$

また，$S_6 = 3^6 - 1 = \mathbf{728}$ である．

(2) 初項が 81，公比が $-\frac{1}{3}$ の等比数列だから，初項から第 n 項までの和 S_n は

◀ $\underset{\times\left(-\frac{1}{3}\right)}{81,\ -27},\ \underset{\times\left(-\frac{1}{3}\right)}{9},\ \underset{\times\left(-\frac{1}{3}\right)}{-3},\ \underset{\times\left(-\frac{1}{3}\right)}{1},\ \cdots$

$$S_n = \frac{81\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{243}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$$

また

$$S_6 = \frac{243}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^6\right\} = \frac{243}{4}\left(1+\frac{1}{729}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{365}{6}}$$

【例題：等比数列の和〜その２〜】

毎年の初めに 100 万円ずつ，年利 3%，1 年ごとの複利法で 10 年積み立てたときの元利合計 S 円を求めよ．ただし $1.03^{10} = 1.34$ とする．なお，複利法とは 1 年ごとに利子を元金にくり入れ，その合計額を次年の元金として利子を計算する手法のことである．

【解答】

毎年の元利がいくらになるかを考えると

1 年目：100×1.03

2 年目：$(100 + 100 \times 1.03) \times 1.03$

$=100 \times 1.03 + 100 \times 1.03^2$

3 年目：$(100 + 100 \times 1.03 + 100 \times 1.03^2) \times 1.03$

$=100 \times 1.03 + 100 \times 1.03^2 + 100 \times 1.03^3$

10 年目：$100 \times 1.03 + 100 \times 1.03^2 + 100 \times 1.03^3 + \cdots$

$+ 100 \times 1.03^{10}$

これは初項 100×1.03，公比 1.03，項数 10 の等比数列の

和なので

$$
\begin{aligned}
S_{10} &= \frac{100 \times 1.03(1.03^{10} - 1)}{1.03 - 1} \\
&= \frac{100 \times 1.03(1.34 - 1)}{1.03 - 1} \\
&= \frac{100 \times 1.03 \times 0.34}{0.03} \\
&\fallingdotseq \mathbf{1167}
\end{aligned}
$$

§ 1.4

Σ 記号

前節では，数列の和について等差数列と等比数列の場合を勉強した．しかし，今後取り扱っていく数列は等差数列や等比数列と比べて複雑になってくるので，そのような複雑な数列においても和を考えることができるように新しい記号を導入し，その性質について勉強しよう．

1.4.1　Σ 記号の定義

■Σ 記号の定義

ここで，数列の和を表すのに便利な記号 Σ を導入する[4]．

Σ 記号の定義

数列 $\{a_n\}$ の初項から，第 n 項までの和 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ を，Σ 記号を用いて

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

と表す．

つまり，$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ とは，a_k において，$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,\ n$ として得られるすべての項 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_{n-1}，a_n の和であると定義する．文字 k の代わりに，i，j などを用いてもよい．

また，a_1 ではなく a_2 からの和を表したいときには，$\sum\limits_{k=2}^{n} a_k$ と書けばよい．つまり

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

である．

■Σ 記号に慣れる

まずは Σ 記号に慣れるために，例題をみていくことにしよう．

---

[4] Σ は和 (sum) の頭文字 S にあたるギリシア文字で，シグマと読む．

【例題：Σ 記号の練習〜その１〜】

次の和を，Σ 記号を用いずに表せ（計算はしなくてよい）.

(1) $\sum_{k=1}^{3}(2k-1)$　(2) $\sum_{k=2}^{4}3k^2$　(3) $\sum_{i=1}^{n}3$　(4) $\sum_{j=1}^{n}3^j$　(5) $\sum_{k=1}^{3}(2n-1)$

【解答】

(1) $\sum_{k=1}^{3}(2k-1) = \mathbf{1+3+5}$

(2) $\sum_{k=2}^{4}3k^2 = \mathbf{3\cdot 2^2+3\cdot 3^2+3\cdot 4^2}$

(3) $\sum_{i=1}^{n}3 = \mathbf{3+3+3+\cdots+3}$

◀ 3 は全部で n 個ある

(4) $\sum_{j=1}^{n}3^j = \mathbf{3^1+3^2+3^3+\cdots+3^n}$

(5) $\sum_{k=1}^{3}(2n-1) = \mathbf{(2n-1)+(2n-1)+(2n-1)}$

◀ $\sum_{k=1}^{3}$ の変数は k なので $a_k = 2n-1$ であり，この数列の値は k に何を代入しても $2n-1$ となる

次に数列の和を Σ 記号に書き直してみよう.

【例題：Σ 記号の練習〜その２〜】

次の和を，Σ 記号を用いて表せ.

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2$

(2) $3+5+7+\cdots+(2n+1)$

(3) $3+3+3+\cdots+3$　　（3 は全部で n 個あるとする）

(4) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+5\cdot 7$

Σ 記号に書き直すときには，まずは数列の一般項を求めるとよい．そうすれば数列の和が

$$\sum_{k=\text{（最初の項番号）}}^{\text{（最後の項番号）}}\text{（一般項）}$$

と表現することが出来るようになる.

【解答】

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2 = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{7}k^2}$

◀ $\sum_{k=1}^{7}k^2$ 以外にも $\sum_{k=2}^{8}(k-1)^2$，$\sum_{k=0}^{6}(k+1)^2$ と表せる

(2) $3+5+7+\cdots+(2n+1) = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}(2k+1)}$

(3) $\underbrace{3+3+3+\cdots+3}_{n\text{ 個}} = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}3}$

(4) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+5\cdot 7 = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{5}k(k+2)}$

【例題：Σ 記号の練習〜その３〜】

次の和はどれも同じことを表現していることを確認せよ．

(1) $\sum_{k=1}^{n} 2^k$　　(2) $\sum_{k=2}^{n+1} 2^{k-1}$　　(3) $\sum_{i=1}^{n} (2 \cdot 2^{i-1})$

【解答】

Σ 記号から数列の和に書き下して同一であることを確かめればよい．和はそれぞれ

(1) $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$

(2) $\sum_{k=2}^{n+1} 2^{k-1} = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$

(3) $\sum_{i=1}^{n} 2 \cdot 2^{i-1} = 2 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-1}$

$$= 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$$

となり，同じことを表現している．

1.4.2　Σ の性質

■Σ の性質

Σ を導入した理由は，数列の和を簡単に取り扱うためであった．つまり，

$3 + 1,\ 6 + 4,\ 9 + 9,\ \cdots,\ 3n + n^2$ ………………… ①

のような等差数列でも等比数列でもない数列についても和を考えやすくするためである．その際，よく利用される Σ の計算法則があるので，まずはその計算法則を確認しよう．

Σ 記号に関して，次のことが成り立つ．

Σ 記号の性質

1) $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k}$

2) $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k}$ (c は定数)

【証明】

(1)
$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$$
$$= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1}) + (a_n + b_n)$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + b_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$ ■

(2)
$$\sum_{k=1}^{n} ca_k$$

$$= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_{n-1} + ca_n$$

$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n)$$

$$= c\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad ■$$

これらは，それぞれ

1) Σ 記号は和のところで分配できる
2) Σ 記号内の実数倍は Σ 記号の表に出る

と意味をもたせて覚えるとよい．

この性質を利用すると，数列①の第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}(3k + k^2) = 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2$$

と簡単にすることができる．

あとは $\sum_{k=1}^{n} k$ や $\sum_{k=1}^{n} k^2$ がわかれば，数列①の和を求めることができるわけであるが，これら $\sum_{k=1}^{n} k$ や $\sum_{k=1}^{n} k^2$ については次の『Σ 記号の公式』でまとめて学習することにしよう．

1.4.3　Σ 記号の公式

■Σ 記号の公式

複雑な数列の和が計算できるように，ここでは Σ 記号の公式を学んでいこう．

【暗記：基本的な Σ の計算〜その１〜】

次の数列の和を求めよ．ただし，c は定数とする．

(1) $\sum_{k=1}^{n} c$　　(2) $\sum_{k=1}^{n} k$

【解答】

(1) $\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n\text{ 個}} = \boldsymbol{nc}$

◀ n 個の c の和は nc である

(2) $\sum_{k=1}^{n} k = \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + n}_{n\text{ 個}} = \boldsymbol{\dfrac{n(n+1)}{2}}$

◀ 初項 1，公差 1 の『等差数列の和』(p.12) である

【 暗記 : 基本的な Σ の計算〜その２〜】

等式 $k(k+1) = \dfrac{1}{3}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\}$ を利用して

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

を証明せよ.

【解答】

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\}\right]$$

◀ 等式を利用した

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\}$$

$$\begin{aligned}
= \frac{1}{3}\Big[\ & (\cancel{1\cdot 2\cdot 3} - 0\cdot 1\cdot 2)\\
& + (\cancel{2\cdot 3\cdot 4} - \cancel{1\cdot 2\cdot 3})\\
& + (3\cdot 4\cdot 5 - \cancel{2\cdot 3\cdot 4})\\
& + \cdots\\
& + \{\cancel{(n-1)n(n+1)} - \cancel{(n-2)(n-1)n}\}\\
& + \{n(n+1)(n+2) - \cancel{(n-1)n(n+1)}\}\ \Big]
\end{aligned}$$

◀ 数列を書き下すことにより項が相殺して消えていくことがわかる

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

なので

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(k^2 + k\right) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \sum_{k=1}^{n} k$$

よって

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \sum_{k=1}^{n} k\\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}2n(n+1)(n+2) - \frac{1}{6}3n(n+1)$$

◀ $\frac{1}{6}$ で通分した

$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(n+2)-3\}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad ■$$

自然数の累乗の和

数列の和に関して，次の式がなりたつ.

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} c = nc$

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

【例題：Σ の計算】

次の数列の和を求めよ.

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)$　　(2) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k+1)^2$

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}\\ &= \mathbf{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (2k+1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(4k^2+4k+1)\\ &= 4\sum_{k=1}^{n}k^2 + 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}\\ &= 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\ &\quad + 4\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n\\ &= \frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)\\ &\quad +6(n+1)+3\}\\ &= \mathbf{\frac{1}{3}n(4n^2+12n+11)}\end{aligned}$$

■等比数列の Σ 計算

c は定数として，$\sum c^{(k \text{ の } 1 \text{ 次式})}$ タイプの和は，すべて『等比数列の和』(p.19) として求めることができる．

【例題：等比数列の Σ 計算】

次の数列の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k$　(3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$　(4) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 3^{k-1}$　(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{2k-1}$

【解答】

(1) $$\sum_{k=1}^{n} 3^k = \underbrace{3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n}_{n \text{ 個}} = \frac{3(1-3^n)}{1-3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{3(3^n-1)}{2}}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \underbrace{3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}}_{n-1 \text{ 個}} = \frac{3(1-3^{n-1})}{1-3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{3(3^{n-1}-1)}{2}}$$

(3) $$\sum_{k=2}^{n-1} 3^k = \underbrace{3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^n}_{n-2 \text{ 個}} = \frac{3^2(1-3^{n-2})}{1-3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{9(3^{n-2}-1)}{2}}$$

(4) $$\sum_{k=2}^{n} 3^{k-1} = \underbrace{3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}}_{n-1 \text{ 個}} = \frac{3(1-3^n)}{1-3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{3(3^n-1)}{2}}$$

◀ (2) と同じ答えである

(5) $$\sum_{k=1}^{n} 3^{2k} = \underbrace{3^2 + 3^4 + 3^6 + \cdots + 3^{2n}}_{n \text{ 個}}$$
$$= 9+9^2+9^3+\cdots+9^n = \frac{9(1-9^n)}{1-9} = \boldsymbol{\frac{9(9^n-1)}{8}}$$

繰り返しになるが，$\sum c^{(k \text{ の } 1 \text{ 次式})}$ タイプの和は，『等比数列の和』(p.19) として求めることができる．和を求める際には，数列の和を一度書き下してみて，初項と公比と項数をチェックすればよい．

§ 1.5

いろいろな数列

ここでは，これまでの和の求め方を簡単におさらいした上で，$(n+1)\cdot 2^n$（等差数列 × 等比数列）や $\dfrac{1}{n(n+1)}$（分数列）のような形で一般項が与えられている数列の和の求め方を学ぶ.

1.5.1　a_n =(等差数列の項)×(等比数列の項)

■a_n =(等差数列の項)×(等比数列の項) の和

一般項 a_n が

$$a_n = n\cdot 2^{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で与えられる数列は，具体的に書くと

$$\overset{\boxed{1}}{1\cdot 2^0},\ \overset{\boxed{2}}{2\cdot 2^1},\ \overset{\boxed{3}}{3\cdot 2^2},\ \overset{\boxed{4}}{4\cdot 2^3},\ \overset{\boxed{5}}{5\cdot 2^4},\ \overset{\boxed{6}}{6\cdot 2^5},\ \cdots$$

となる[*5].

この①のように，(等差数列) × (等比数列) で表される数列の，初項から第 n 項までの和は次のように求めることができる[*6].

STEP1

初項から第 n 項までの和 S_n を書き下す.

$$S_n = \underbrace{1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}}_{n\text{ 個の項}}$$

STEP2

この式の辺々を 2 倍（公比倍）した式を書く.

$$2S_n = \underbrace{1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n}_{n\text{ 個の項}}$$

STEP3

上の 2 つの式を並べる．このとき，下のように，2 倍（公比倍）した式の方を右に 1 段ずらして書いておく.

$$\begin{array}{rclllllll}
S_n & = & 1 & +2\cdot 2 & +3\cdot 2^2 & +\cdots & +(n-1)\cdot 2^{n-2} & +n\cdot 2^{n-1} & \\
2S_n & = & & 1\cdot 2 & +2\cdot 2^2 & +\cdots & +(n-2)\cdot 2^{n-2} & +(n-1)\cdot 2^{n-1} & +n\cdot 2^n
\end{array}$$

[*5] この数列は，各項の左側の数字は初項 1，公差 1 の等差数列になっていて，各項の右側の数字は初項 1，公比 2 の等比数列になっている.

[*6] 以下，**STEP4** までは，等比数列の和の求め方 (p.18) とまったく同じである.

STEP4

上の式から下の式を引く．

$$
\begin{array}{rrcllllll}
 & S_n & = & 1 & +2\cdot 2 & +3\cdot 2^2 & +\cdots & +(n-1)\cdot 2^{n-2} & +n\cdot 2^{n-1} & \\
-) & 2S_n & = & & 1\cdot 2 & +2\cdot 2^2 & +\cdots & +(n-2)\cdot 2^{n-2} & +(n-1)\cdot 2^{n-1} & +n\cdot 2^n \\
\hline
 & -S_n & = & 1 & +1\cdot 2 & +1\cdot 2^2 & +\cdots & +1\cdot 2^{n-2} & +1\cdot 2^{n-1} & -n\cdot 2^n
\end{array}
$$

STEP5

このとき，必ず等比数列の和が現れるので，その部分を計算する．

$$
\begin{aligned}
-S_n &= \underbrace{1+1\cdot 2+1\cdot 2^2+\cdots+1\cdot 2^{n-2}+1\cdot 2^{n-1}}_{\text{初項 1 公比 2 の等比数列}} - n\cdot 2^n \\
&= \frac{1\cdot(1-2^n)}{1-2} - n\cdot 2^n \\
&= 2^n - 1 - n\cdot 2^n \\
&= -(n-1)2^n - 1
\end{aligned}
$$

式全体に -1 を掛けて

$$S_n = (n-1)2^n + 1$$

を得る．

解法をまとめておこう．

a_n = (等差数列の項) × (等比数列の項) の和の解法

STEP1：和を書き下す．

STEP2：和を公比倍したものを書く．

STEP3：上の 2 式をずらして並べる．

STEP4：項のかたまりを崩さないように差をとる．

STEP5：等比数列の和を見つけて計算し，S_n を求める．

【例題：等差×等比型数列の和〜その１〜】

次の和 S を求めよ．

$$S = 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + \cdots + (2n-1)\cdot 2^{n-1}$$

【解答】

公比を掛けて差をとると

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + \cdots + (2n-1)\cdot 2^{n-1} \\
2S &= 1\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \cdots + (2n-3)\cdot 2^{n-1} + (2n-1) + 2^n
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
-S &= 1 + 2(2 + 2^2 + \cdots 2^{n-1}) - (2n-1)\cdot 2^n \\
&= 1 + 2\cdot\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} - (2n-1)\cdot 2^n
\end{aligned}
$$

$$= 1 + 2 \cdot (2^n - 2) - (2n - 1) \cdot 2^n$$
$$= -3 - (2n - 3)2^n$$

よって，$\boldsymbol{S = 3 + (2n - 3) \cdot 2^n}$ である．

【例題：等差×等比型数列の和〜その２〜】

次の和 S を求めよ．

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

【解答】

$x = 1$，$x \neq 1$ で場合わけを行なう．

1) $x = 1$ のとき

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)} \end{aligned}$$

2) $x \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} \\ xS &= x + 2x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-1} + nx^n \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} (1-x)S &= 1 + (x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) - nx^n \\ &= 1 + \frac{x(1-x^{n-1})}{1-x} - nx^n \end{aligned}$$

◀ 初項 x，公比 x，項数 $n-1$ の等比数列の和

よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1-nx^n}{1-x} + \frac{x(1-x^{n-1})}{(1-x)^2} \\ &= \frac{(1-nx^n)(1-x) + x(1-x^{n-1})}{(1-x)^2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}} \end{aligned}$$

1.5.2　$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

■分数列の和

一般項 a_n が

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で与えられる数列は，具体的に書くと

$$\overset{\boxed{1}}{\frac{1}{1\cdot 2}},\quad \overset{\boxed{2}}{\frac{1}{2\cdot 3}},\quad \overset{\boxed{3}}{\frac{1}{3\cdot 4}},\quad \overset{\boxed{4}}{\frac{1}{4\cdot 5}},\quad \overset{\boxed{5}}{\frac{1}{5\cdot 6}},\quad \overset{\boxed{6}}{\frac{1}{6\cdot 7}},\quad \cdots$$

となる[*7]．

この①のように，一般項 $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ で表される数列の，初項から第 n 項までの和は次のように求めることができる

STEP1

まず $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ を分解する．このとき，下のように自分で a とおく（a の値は後で求める）．

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} - \frac{a}{n+1} \qquad \leftarrow \text{分母の } n(n+1) \text{ を分解して } n \text{ と } n+1 \text{ にする}$$

このような式変形を，**部分分数分解** (resolve into partial fractions) という．

STEP2

右辺を通分し，$\dfrac{1}{n(n+1)}$ と等しくなるように a を決定する．

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{n} - \frac{a}{n+1}\\
=&\frac{a(n+1)}{n(n+1)} - \frac{an}{n(n+1)} \qquad \leftarrow \frac{1}{n(n+1)} \text{ で通分した}\\
=&\frac{a}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

これが，$\dfrac{1}{n(n+1)}$ と等しくなるのは，(分子を比較して)$a = 1$ のときである．これより

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad \leftarrow \text{分解が完了した}$$

という等式を得る．

STEP3

右辺の式を利用して，初項から第 n 項までの和を，具体的に書き出してみる．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

STEP4

相殺して消える部分ができるので，下のように消していく．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

[*7] この数列は，各項の分母の左側の数字は初項 1，公差 1 の等差数列になっていて，各項の分母の右側の数字は初項 2，公差 1 の等比数列になっている．

$$
\begin{aligned}
&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\\
&=\frac{n}{n+1}
\end{aligned}
$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$$

を得る．

解法をまとめておこう．

$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ の数列の和の解法

STEP1：部分分数に分解する．

STEP2：部分分数の係数を決定する．

STEP3：具体的に和を書き出してみる．

STEP4：相殺して消える部分があるので消し，S_n を求める．

【例題：分数数列の和】

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ．

$$\frac{1}{1\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 5},\ \frac{1}{5\cdot 7},\cdots$$

【解答】

一般項を求めて部分分数に分解する．

一般項 $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}&=\frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
S_n&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{n}{2n+1}$$

§ 1.6

階差数列

ここでは複雑な数列に対して，隣り合う 2 項間の差に注目して，与えられた数列の一般項を求めるやり方を学ぶ.

1.6.1　階差数列の定義

■階差数列とは何か

下の数列の第 n 項をいきなり求めるのは，少し難しい.

①　②　③　④　⑤　⑥
2，6，12，20，30，?，$\cdots$

このように一般項がすぐに把握できない場合は，隣り合った項の差をとって，新たな数列をつくってみるとうまくいくことがある．まず新しく作られる数列について確認しよう.

①　②　③　④　⑤
2 , 6 , 12 , 20 , 30 , $\cdots$
⤻　⤻　⤻　⤻　⤻
+4 , +6 , +8 , +10, $\boxed{\text{X}}$

隣り合った項の差に注目すると，たとえば X は 12 と予想できるので，第 6 項は $30 + 12 = 42$ と求めることができる.

階差数列の定義

数列 $\{a_n\}$ に対して

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

となる数列 $\{b_n\}$ を，数列 $\{a_n\}$ の**階差数列** (progression of differences) という.

この例では，階差数列 $\{b_n\}$ は，初項 4，公差 2 の等差数列になっているので

$$b_n = 4 + (n - 1) \times 2 = 2n + 2$$

と表せる.

【例題：階差数列の定義】

数列 1，2，6，13，23，36 の階差数列を書け.

【解答】

階差数列 $\{b_n\}$ は

$$b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$
$$b_2 = a_3 - a_2 = 6 - 2 = 4$$

$$\begin{aligned} b_3 &= a_4 - a_3 = 13 - 6 = 7 \\ b_4 &= a_5 - a_4 = 23 - 13 = 10 \\ b_5 &= a_6 - a_5 = 36 - 23 = 13 \end{aligned}$$

よって，階差数列は $\{1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13\}$ で与えられる．

1.6.2　階差数列から一般項を求める

■階差数列の一般項

次に，本題であった数列 $\{a_n\}$ を求めよう．

$$\overset{\textcircled{1}}{2}\ ,\ \overset{\textcircled{2}}{6}\ ,\ \overset{\textcircled{3}}{12}\ ,\ \overset{\textcircled{4}}{20}\ ,\ \overset{\textcircled{5}}{30}\ ,\ \cdots\ ,\ a_n\ ,\ a_{n+1}\ ,\ \cdots\ \leftarrow \text{数列}\ \{a_n\}$$

⤻　⤻　⤻　⤻　⤻　…　⤻

$$\underset{b_1}{4}\ ,\ \underset{b_2}{6}\ ,\ \underset{b_3}{8}\ ,\ \underset{b_4}{10}\ ,\ \underset{b_5}{12}\ ,\ \cdots\ ,\underset{b_n}{2n+2},\ \cdots\ \leftarrow \text{数列}\ \{b_n\}$$

階差数列の一般項 b_n がわかった場合，そこから a_n を以下のようにして求めることができる．

上の数列から

$$\begin{aligned} a_2 &= \overset{\textcircled{1}}{2} + \overset{b_1}{4} \\ a_3 &= \overset{\textcircled{1}}{2} + (\overbrace{4+6}^{b_1+b_2}) \\ a_4 &= \overset{\textcircled{1}}{2} + (\overbrace{4+6+8}^{b_1+b_2+b_3}) \\ a_5 &= \overset{\textcircled{1}}{2} + (\overbrace{4+6+8+10}^{b_1+b_2+b_3+b_4}) \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

であるから，a_n は「a_1 に b_1 から b_{n-1} までの $n-1$ 項を加えたもの」とわかる．よって，$n \geqq 2$ [*8]のとき第 n 項は

$$\begin{aligned} a_n &= \overset{\textcircled{1}}{2} + \overbrace{\left[4+6+8+10+12+\cdots+\left\{2(n-1)+2\right\}\right]}^{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}} \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \end{aligned}$$

として求めることができる．

以上，まとめておこう．

[*8] a_1 に 1 個以上の階差を加えて a_n を求めているので，この a_n は $n = 1$ の場合である a_1 を表現することができない．

階差数列 $\{b_n\}$ から一般項 a_n を求める

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおくと，$n \geqq 2$ のとき一般項 a_n は

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

と求めることができる．

【例題：階差数列 $\{b_n\}$ から一般項 a_n を求める】

次の数列の一般項 a_n を求めよ．

$$1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26, \cdots$$

【解答】

階差数列 $\{b_n\} = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9, \cdots$ より

$$b_n = 2n - 1$$

よって $n \geqq 2$ において

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k - 1) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - (n-1) \\ &= n^2 - 2n + 2 \end{aligned}$$

$n = 1$ を代入したとき $1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$ となり，a_1 と等しくなるので，$n \geqq 1$ において $\boldsymbol{a_n = n^2 - 2n + 2}$ と表せる．

§ 1.7

和から一般項へ

今までは，まず数列の一般項 a_n を求めてから，その初項から第 n 項までの和 S_n を求めるという手順を踏んできた．今度は逆に，和 S_n が先にわかっている場合に，和 S_n から一般項 a_n を求める方法について考えてみよう．

1.7.1　和から一般項へ

■和から一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

ここでたとえば，$S_3 = 9$ であり，$S_4 = 16$ であるとき

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

であるから，上の式から下の式を引くと

$$S_4 - S_3 = a_4$$

を得る．よって，$a_4 = S_4 - S_3 = 16 - 9 = 7$ であることがわかる．

一般に，初項から第 n 項までの和 S_n から，初項から第 $n-1$ 項までの和 S_{n-1} を引くことにより，第 n 項 a_n を求めることができる．つまり

$$\begin{array}{rrcccccccccc} & S_n & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & \cdots & + a_{n-1} + & a_n \\ -) & S_{n-1} & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & \cdots & + a_{n-1} & \\ \hline & S_n - S_{n-1} & = & a_n & & & & & & & & \end{array}$$

と求めることができる．

ただし，この式が意味をもつのは $n \geqq 2$ においてである．[*9] a_1 は別に求めなければならないが，$a_1 = S_1$ からすぐに求めることができる．

和 S_n から一般項 a_n を求める式

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n - S_{n-1} = a_n \quad (n \geqq 2)$$
$$S_1 = a_1$$

として，一般項 a_n を求めることができる．

[*9] $n = 1$ のとき，S_{n-1} は S_0 となり，これは S_n の定義上存在しないので，上記の式が意味を持たなくなってしまう．

【例題：数列の和から一般項を求める】

初項から第 n 項までの和が次の式で表される数列の第 n 項を求めよ

$$S_n = n^3$$

【解答】

$n \geqq 2$ において

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^3 - (n-1)^3 \\ &= 3n^2 - 3n + 1 \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

ここで，$a_1 = S_1 = 1$ であり，①は $n = 1$ のときでも成立する．よって，$n = 1$ において $\boldsymbol{a_n = 3n^2 - 3n + 1}$ となる．

§ 1.8

群数列

ここでは数列として並んでいる数をグループ分けした数列，群数列について学ぶ.

1.8.1　群数列の定義

■群数列とは何か

下の数列のように，いくつかのまとまりで数列を考えたものを**群数列** () という.

$$(\overset{①}{1}),\ (\overset{②}{3},\ \overset{③}{5},\ \overset{④}{7}),\ (\overset{⑤}{9},\ \overset{⑥}{11},\ \overset{⑦}{13},\ \overset{⑧}{15},\ \overset{⑨}{17}),\ (\overset{⑩}{19},\ \cdots$$

群数列では，次のように各群に番号をつけ，「第～群」と呼ぶことにしよう.

$$\overbrace{(\ \overset{①}{1}\ )}^{❶},\ \overbrace{(\overset{②}{3},\ \overset{③}{5},\ \overset{④}{7})}^{❷},\ \overbrace{(\overset{⑤}{9},\ \overset{⑥}{11},\ \overset{⑦}{13},\ \overset{⑧}{15},\ \overset{⑨}{17})}^{❸},\ \overbrace{(\overset{⑩}{19},\ \cdots\qquad\qquad}^{❹}$$

たとえば

第 3 群は (9, 11, 13, 15, 17) である.
第 4 群の一番初めの項は，19 である.

などのように用いる.

また

$$\overset{①}{\frac{1}{2}},\ \overset{②}{\frac{2}{3}},\ \overset{③}{\frac{1}{3}},\ \overset{④}{\frac{3}{4}},\ \overset{⑤}{\frac{2}{4}},\ \overset{⑥}{\frac{1}{4}},\ \overset{⑦}{\frac{4}{5}},\ \overset{⑧}{\frac{3}{5}},\ \overset{⑨}{\frac{2}{5}},\ \overset{⑩}{\frac{1}{5}},\ \overset{⑪}{\frac{5}{6}},\ \cdots$$

のように，群で区切られてなくても，数列に何らかのまとまりがある場合には，下のように仕切りを入れて，自分で群にまとめるとよい．そうすることで群内の規則に注目でき，解答を進めることができるようになる.

$$\overbrace{\left(\overset{①}{\frac{1}{2}}\right)}^{❶},\ \overbrace{\left(\overset{②}{\frac{2}{3}},\ \overset{③}{\frac{1}{3}}\right)}^{❷},\ \overbrace{\left(\overset{④}{\frac{3}{4}},\ \overset{⑤}{\frac{2}{4}},\ \overset{⑥}{\frac{1}{4}}\right)}^{❸},\ \overbrace{\left(\overset{⑦}{\frac{4}{5}},\ \overset{⑧}{\frac{3}{5}},\ \overset{⑨}{\frac{2}{5}},\ \overset{⑩}{\frac{1}{5}}\right)}^{❹},\ \overbrace{\left(\overset{⑪}{\frac{5}{6}},\ \cdots\qquad\qquad\right.}^{❺}$$

1.8.2　群数列の基本的な考え方

■群数列を考える際のポイント

群数列を見たら，問題を考える前に，まず次の 2 つの点について調べておくとよい．

(1) 第 n 項 a_n がわかるときは求めておく．

(2) 第 1 群から第 n 群までにいくつの項があるのか調べその数を l_n とおく．

前ページの例で調べてみよう．

$$\overbrace{(\ \overset{\textcircled{1}}{1}\ )}^{\text{❶}},\ \overbrace{(\overset{\textcircled{2}}{3},\ \overset{\textcircled{3}}{5},\ \overset{\textcircled{4}}{7})}^{\text{❷}},\ \overbrace{(\overset{\textcircled{5}}{9},\ \overset{\textcircled{6}}{11},\ \overset{\textcircled{7}}{13},\ \overset{\textcircled{8}}{15},\ \overset{\textcircled{9}}{17})}^{\text{❸}},\ \overbrace{(\overset{\textcircled{10}}{19},\ \cdots}^{\text{❹}}$$

この数列は，初項 1 公差 2 の等差数列であるから

$$a_n = 1 + (n - 1) \times 2 = 2n - 1$$

とわかる．

また，第 1 群には項が 1 個，第 2 群には項が 3 個，第 3 群には項が 5 個，$\cdots$，第 n 群には項が $2n - 1$ 個あるのがわかる．よって，第 1 群から第 n 群までに含まれる項の数 l_n は

$$l_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$$

と求まる．

もう 1 つの例でも試してみよう．

$$\overbrace{\left(\overset{\textcircled{1}}{\frac{1}{2}}\right)}^{\text{❶}},\ \overbrace{\left(\overset{\textcircled{2}}{\frac{2}{3}},\ \overset{\textcircled{3}}{\frac{1}{3}}\right)}^{\text{❷}},\ \overbrace{\left(\overset{\textcircled{4}}{\frac{3}{4}},\ \overset{\textcircled{5}}{\frac{2}{4}},\ \overset{\textcircled{6}}{\frac{1}{4}}\right)}^{\text{❸}},\ \overbrace{\left(\overset{\textcircled{7}}{\frac{4}{5}},\ \overset{\textcircled{8}}{\frac{3}{5}},\ \overset{\textcircled{9}}{\frac{2}{5}},\ \overset{\textcircled{10}}{\frac{1}{5}}\right)}^{\text{❹}},\ \overbrace{\left(\overset{\textcircled{11}}{\frac{5}{6}},\ \cdots\right.}^{\text{❺}}$$

この例で第 n 項はすぐにわかりそうにない．

また，第 1 群には項が 1 個，第 2 群には項が 2 個，第 3 群には項が 3 個，$\cdots$，第 n 群には項が n 個あるのがわかる．よって，第 1 群から第 n 群までに含まれる項の数 l_n は

$$l_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n + 1)}{2}$$

これら 2 つのポイントを押さえると，群数列の問題が考えやすくなる．

【例題：群数列】

次の数列について各問題に答えよ

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{5}{6}$$

(1) $\dfrac{18}{25}$ はじめから数えて第何項目にあるか.

(2) はじめから数えて第 666 項目にある分数は何か.

(3) 初項から第 666 項までの和を求めよ.

【解答】

(1) 次のように群分けをおこなう.

$$\overbrace{\left(\overset{①}{\frac{1}{2}}\right)}^{\text{❶}},\ \overbrace{\left(\overset{②}{\frac{2}{3}},\ \overset{③}{\frac{1}{3}}\right)}^{\text{❷}},\ \overbrace{\left(\overset{④}{\frac{3}{4}},\ \overset{⑤}{\frac{2}{4}},\ \overset{⑥}{\frac{1}{4}}\right)}^{\text{❸}},\ \overbrace{\left(\overset{⑦}{\frac{4}{5}},\ \cdots\right.}^{\text{❹}}$$

規則より，$\dfrac{18}{25}$ は第 24 群に存在していることがわかる．第 n 群に含まれる項数が n であることを考えると，第 23 群までの項数は

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+23 &= \frac{1}{2}\cdot 23(1+23)\\ &= 276\end{aligned}$$

よって，第 24 群の第 1 項は，最初から数えて 277 番目になる．$\dfrac{18}{25}$ は第 24 群の第 7 項なので

$$277+7-1=283$$

以上より，$\dfrac{18}{25}$ は最初から数えて **283**番目 の項となる．

(2) 第 666 項が含まれる群を求める．666 項が第 n 群に含まれるとすると

$$\begin{aligned}&(\text{第 } n-1 \text{ 群までの項数}) < 666\\ &\qquad < (\text{第 } n \text{ 群までの項数})\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}(n-1)n < 666 < \frac{1}{2}n(n+1)\end{aligned}$$

これを満たす n は $n=36$ である．$\dfrac{1}{2}(36-1)35=630$ より，第 36 群の第 1 項は，最初から数えて 631 番目である．$666-631+1=36$ なので，最初から数えて

第 666 項目の分数は，第 36 群の第 36 であり，**1**37

(3) 第 n 群に含まれる項の和 S_n は

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{n}{n+1} + \frac{n-1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n+1}\left\{n + (n+1) + \cdots + 1\right\} \\
&= \frac{1}{n+1}(1 + 2 + \cdots + n) \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \frac{n}{2}
\end{aligned}
$$

よって，第 666 項までの和は第 36 群までの和で

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{36} \frac{k}{2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}36 \cdot 37 \\
&= \mathbf{333}
\end{aligned}
$$

§ 1.9

数列の増加と減少

ここでは，数列の増加と減少を調べる方法を考えてみよう.

1.9.1　数列の増加と減少

■数列の増加と減少

たとえば，数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$$a_n = n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で与えられるとき，この数列の増加や減少の様子はどうなるだろうか.

試しに，①の n に $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \cdots$ を代入し，計算してみると

$$a_1 = 1\left(\frac{5}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \fallingdotseq \mathbf{0.167}$$

$$a_2 = 2\left(\frac{5}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{18} \fallingdotseq \mathbf{0.278}$$

$$a_3 = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{72} \fallingdotseq \mathbf{0.347}$$

$$a_4 = 4\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{125}{324} \fallingdotseq \mathbf{0.386}$$

$$a_5 = 5\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{3125}{7776} \fallingdotseq \mathbf{0.402}$$

$$a_6 = 6\left(\frac{5}{6}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{3125}{7776} \fallingdotseq \mathbf{0.402}$$

$$a_7 = 7\left(\frac{5}{6}\right)^6\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{109375}{279936} \fallingdotseq \mathbf{0.391}$$

$$a_8 = 8\left(\frac{5}{6}\right)^7\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{78125}{209952} \fallingdotseq \mathbf{0.372}$$

$$\vdots$$

となるので，数列 $\{a_n\}$ は n が 1 から 5 までは増加し，6 から先では減少するのがわかる.

しかし，このような方法では，すべての自然数 n について調べるのは不可能である.

そこで，$a_{n+1} - a_n$ という漸化式をつくってみよう.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1)\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(\frac{1}{6}\right) - n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(\frac{1}{6}\right) - n\cdot\frac{6}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(\frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(\frac{1}{6}\right)\{5(n+1)-6n\}$$
$$= \underbrace{\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(\frac{1}{6}\right)}_{正}\underbrace{(5-n)}_{A}$$

この式の A の部分に着目すると

1) $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ のときは，$a_{n+1}-a_n$ が正，つまり $a_n<a_{n+1}$ となるから

$$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$$

がわかる．

2) $n=5$ のときは，$a_{n+1}-a_n$ が 0，つまり $a_n=a_{n+1}$ となるから

$$a_5=a_6$$

がわかる．

3) $n=6,\ 7,\ 8,\ \cdots$ のときは，$a_{n+1}-a_n$ が負，つまり $a_n>a_{n+1}$ となるから

$$a_6>a_7>a_8>\cdots$$

がわかる．

以上，1)〜3) より

$$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_5=a_6>a_7>a_8>\cdots$$

となるのがわかる．

以上，まとめておこう．

数列の増加・減少を調べる方法

一般項 a_n に関する漸化式

$$a_{n+1}-a_n$$

をつくり，この値の正，負，0 を調べることにより，数列 $\{a_n\}$ の増減がわかる．

【例題：数列の増減】

$a_n=n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ の増減を調べよ

【解答】

一般項 a_n に関する漸化式をつくると

$$a_{n+1}-a_n=(n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^n\frac{1}{4}-n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{4}$$
$$=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{4}\left\{\frac{3}{4}(n+1)-n\right\}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4}n + \frac{3}{4}\right)$$

よって

$a_{n+1} - a_n > 0$ を満たす n は，$n < 3$
$a_{n+1} - a_n = 0$ を満たす n は，$n = 3$
$a_{n+1} - a_n < 0$ を満たす n は，$n > 3$

すなわち，$\boldsymbol{a_1 < a_2 < a_3 = a_4 > a_5 > a_6 > a_7 > \cdots}$ となる．

§ 1.10

補足

ここでは補足として p.27 で示した自然数の累乗の和を別の方法で導いてみよう．

1.10.1　$a_n = n(n+1)$，$a_n = n^2$ タイプの数列の和

■ $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)$ の求め方

一般項 a_n が

$$a_n = n(n+1)$$

で与えられる数列は，具体的に書くと

$$\overset{\boxed{1}}{1}\cdot 2,\ \overset{\boxed{2}}{2}\cdot 3,\ \overset{\boxed{3}}{3}\cdot 4,\ \overset{\boxed{4}}{4}\cdot 5,\ \overset{\boxed{5}}{5}\cdot 6,\ \overset{\boxed{6}}{6}\cdot 7,\ \cdots$$

となる[10]．このように，『2 つの連続した数の積』[11]で表される数列の，初項から第 n 項までの和は次のような手順で求めることができる．

STEP1

$a_n = n(n+1)$ の 2 連続数に着目して，n，$n+1$ の“続き”である $n+2$ を a_n に掛けたものから，n，$n+1$ の“1 つ前”である $n-1$ を a_n に掛けたものを引く

$$\underbrace{n(n+1)}_{a_n}(n+2) - (n-1)\underbrace{n(n+1)}_{a_n}$$

STEP2

共通因数 $n(n+1)$ のかたまりを崩さないようにまとめ，$n(n+1)$ について解く．

$$\begin{aligned} & n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) \\ =& n(n+1)\{(n+2) - (n-1)\} \\ =& 3n(n+1) \end{aligned}$$

よって

$$n(n+1) = \frac{1}{3}\{n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)\}$$

STEP3

---

[10] この数列は，各項の左側の数字に着目すると，“初項 1，公差 1 の等差数列”になっていて，各項の右側の数字だけに着目すると，“初項 2，公差 1 の等差数列”になっている．

[11] 単に，『2 連続数の積』ともいう．

この関係式を利用して，初項から第 n 項までの和を，具体的に書き出してみる．

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$$

$$=\frac{1}{3}\Big[(1\cdot2\cdot3-0\cdot1\cdot2)+(2\cdot3\cdot4-1\cdot2\cdot3)+(3\cdot4\cdot5-2\cdot3\cdot4)+\cdots$$

$$\cdots+\{(n-1)n(n+1)-(n-2)(n-1)n\}+\{n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)\}\Big]$$

STEP4

相殺して消える部分ができるので，下のように消していくと，和が求まる．

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$$

$$=\frac{1}{3}\Big[(\cancel{1\cdot2\cdot3}-0\cdot1\cdot2)+(\cancel{2\cdot3\cdot4}-\cancel{1\cdot2\cdot3})+(\cancel{3\cdot4\cdot5}-\cancel{2\cdot3\cdot4})+\cdots$$

$$\cdots+\{\cancel{(n-1)n(n+1)}-\cancel{(n-2)(n-1)n}\}+\{n(n+1)(n+2)-\cancel{(n-1)n(n+1)}\}\Big]$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

以上，まとめておこう．

2 連続数の積の数列の和

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

■ $\sum_{k=1}^{n} k^2$ の求め方

一般項 a_n が

$$a_n = n^2$$

で与えられる数列は，具体的に書くと

$$\overset{\boxed{1}}{1^2},\ \overset{\boxed{2}}{2^2},\ \overset{\boxed{3}}{3^2},\ \overset{\boxed{4}}{4^2},\ \overset{\boxed{5}}{5^2},\ \overset{\boxed{6}}{6^2},\ \cdots$$

となる[12]．このように，『$a_n = n^2$』で表される数列の，初項から第 n 項までの和は次のような手順で求めることができる．

STEP1

2 連続数の積の数列の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

を思い出す．

STEP2

左辺の $\sum$ の中の式を展開すると，k^2+k になるから，k の項を右辺に移項する．

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\\
\Leftrightarrow &\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\\
\Leftrightarrow &\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \sum_{k=1}^{n} k
\end{aligned}$$

STEP3

右辺の $\sum_{k=1}^{n} k$ を計算し，共通因数でまとめると和の公式が求まる．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \sum_{k=1}^{n} k\\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1)\\
&= \frac{1}{6}2n(n+1)(n+2) - \frac{1}{6}3n(n+1) \qquad \leftarrow \frac{1}{6}\ \text{で通分}\\
&= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(n+2)-3\}\\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

以上，まとめておこう．

---

[12] この数列は，(初項 1，公差 1 の等差数列)^2 になっている．

一般項が $a_n = n^2$ の数列の和

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

1.10.2　$a_n = n(n+1)(n+2)$，$a_n = n^3$ タイプの数列の和

■ $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ の求め方

一般項 a_n が

$$a_n = n(n+1)(n+2) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で与えられる数列は，具体的に書くと

$$1\cdot\overset{\boxed{1}}{2}\cdot 3,\ 2\cdot\overset{\boxed{2}}{3}\cdot 4,\ 3\cdot\overset{\boxed{3}}{4}\cdot 5,\ 4\cdot\overset{\boxed{4}}{5}\cdot 6,\ 5\cdot\overset{\boxed{5}}{6}\cdot 7,\ 6\cdot\overset{\boxed{6}}{7}\cdot 8,\ \cdots$$

となる.[*13]

この①のように，『3 つの連続した数の積』[*14]で表される数列の，初項から第 n 項までの和は次のように求めることができる.

STEP1

$a_n = n(n+1)(n+2)$ の 3 連続数に着目して，n，$n+1$，$n+2$ の“続き”である $n+3$ を a_n に掛けたものから，n，$n+1$，$n+2$ の“1 つ前”である $n-1$ を a_n に掛けたものを引く

$$\underbrace{n(n+1)(n+2)}_{a_n}(n+3)-(n-1)\underbrace{n(n+1)(n+2)}_{a_n}$$

STEP2

共通因数 $n(n+1)(n+2)$ のかたまりを崩さないようにまとめ，$n(n+1)(n+2)$ について解く.

$$\begin{aligned}&\ n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)\\ =&n(n+1)(n+2)\{(n+3)-(n-1)\}\\ =&4n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

よって

$$n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}\{n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)\}$$

STEP3

この関係式を利用して，初項から第 n 項までの和を，具体的に書き出してみる.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\\ =&\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}\right]\end{aligned}$$

[*13] この数列は，各項の左側の数字に着目すると，“初項 1，公差 1 の等差数列”になっていて，各項の中央の数字だけに着目すると，“初項 2，公差 1 の等差数列”になっていて，各項の右側の数字だけに着目すると，“初項 3，公差 1 の等差数列”になっている.

[*14] 単に，『3 連続数の積』ともいう.

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$$

$$=\frac{1}{4}\Big[(1\cdot2\cdot3\cdot4-0\cdot1\cdot2\cdot3)+(2\cdot3\cdot4\cdot5-1\cdot2\cdot3\cdot4)+(3\cdot4\cdot5\cdot6-2\cdot3\cdot4\cdot5)+\cdots$$

$$\cdots+\{(n-1)n(n+1)(n+2)-(n-2)(n-1)n(n+1)\}+\{n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)\}\Big]$$

STEP4

相殺して消える部分ができるので，下のように消していくと，和が求まる．

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$$

$$=\frac{1}{4}\Big[(\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot4}-0\cdot1\cdot2\cdot3)+(\cancel{2\cdot3\cdot4\cdot5}-\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot4})+(\cancel{3\cdot4\cdot5\cdot6}-\cancel{2\cdot3\cdot4\cdot5})+\cdots$$

$$\cdots+\{\cancel{(n-1)n(n+1)(n+2)}-\cancel{(n-2)(n-1)n(n+1)}\}+\{n(n+1)(n+2)(n+3)-\cancel{(n-1)n(n+1)(n+2)}\}\Big]$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

以上，まとめておこう．

3 連続数の積の数列の和

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

■$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ の求め方

一般項 a_n が

$$a_n = n^3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

で与えられる数列は，具体的に書くと

$$\overset{\boxed{1}}{1^3},\ \overset{\boxed{2}}{2^3},\ \overset{\boxed{3}}{3^3},\ \overset{\boxed{4}}{4^3},\ \overset{\boxed{5}}{5^3},\ \overset{\boxed{6}}{6^3},\ \cdots$$

となる[*15].

この②のように，『$a_n = n^3$』で表される数列の，初項から第 n 項までの和は次のように求めることができる.

STEP1

3 連続数の積の数列の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

を思い出す.

STEP2

左辺の $\sum$ の中の式を展開すると，$k^2 + 3k + 2k$ になるから，$3k^2 + 2k$ の項を右辺に移項する.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left(k^3 + 3k^2 + 2k\right) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)\\
\Leftrightarrow &\sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 2k) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)\\
\Leftrightarrow &\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 2k)\\
\Leftrightarrow &\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k
\end{aligned}$$

STEP3

右辺の $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ と $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ を計算し，共通因数でまとめると和の公式が求まる.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - 3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\
&= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) - n(n+1)\\
&= \frac{1}{8}2n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{1}{8}4n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{8}8n(n+1) \qquad \leftarrow \frac{1}{8}\ \text{で通分}\\
&= \frac{1}{8}n(n+1)\left\{2(n+2)(n+3) - 4(2n+1) - 8\right\}
\end{aligned}$$

[*15] この数列は，(初項 1，公差 1 の等差数列)^3 になっている.

$$=\frac{1}{8}n(n+1)\left\{2(n^2+5n+6)-8n-4-8\right\}$$

$$=\frac{1}{8}n(n+1)\left\{2n^2+10n+12-8n-4-8\right\}$$

$$=\frac{1}{8}n(n+1)\left\{2n^2+2n\right\}$$

$$=\frac{1}{8}n(n+1)\{2n(n+1)\}$$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

以上，まとめておこう．

一般項が $a_n = n^3$ の数列の和

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$ と覚えるとよい．

1.10.3　$a_n = \overbrace{n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))}^{m\text{ 個}}$ と $a_n = n^m$ タイプの数列の和

1.10.1 と 1.10.2 の発展形として，次のような数列を考えてみよう．

$$\overbrace{1\cdot2\cdot3\cdots(m-1)\cdot m}^{1\text{ 番目}},\ \overbrace{2\cdot3\cdot4\cdots m\cdot(m+1)}^{2\text{ 番目}},\ \overbrace{3\cdot4\cdot5\cdots(m+1)\cdot(m+2)}^{3\text{ 番目}},\ \cdots$$

(1) の数列は，各項の 1 番左側に着目すると，“初項 1，公差 1 の等差数列” になっている．また，各項の左から 2 番目だけに着目すると，“初項 2，公差 1 の等差数列” になっている．$\cdots$．最後に，各項の一番右側だけに着目すると，“初項 m，公差 1 の等差数列” になっている．よって，一般項 a_n は

$$a_n = \overbrace{n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))}^{m\text{ 個の連続数の積}}$$

と表すことができる．

この (1) の数列のように，『m 個の連続数の積[16]』で表される数列の初項から第 n 項までの和は次のように求めることができる．

STEP1

$a_n = n(n+1)(n+2)$ の 3 連続数に着目して，n，$n+1$，$n+2$，$\cdots$，$n+(m-1)$ の “続き” である $n+m$ を掛けたものを下のように書く．

$$n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))(n+m)$$

STEP2

同じく n，$n+1$，$n+2$，$\cdots$，$n+(m-1)$ の “1 つ前” である $n-1$ を掛けたものを引く．

$$n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))(n+m)-(n-1)n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))$$

STEP3

共通因数 $n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))$ のかたまりを崩さないようにまとめる．

$$\begin{aligned}&n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))(n+m)-(n-1)n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))\\=&n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))\{(n+m)-(n-1)\}\\=&\overbrace{(m+1)}^{\text{係数}}n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))\end{aligned}$$

STEP4

---

[16] 単に，『m 連続数の積』ともいう．

式全体を $m+1$ で割ることによって，右辺の $n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))$ について解く．

$$\begin{aligned}
&n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))\\
=&\frac{1}{m+1}\left\{n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))(n+m)-(n-1)n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))\right\}
\end{aligned}$$

STEP5

右辺の式を利用して，初項から第 n 項までの和を，具体的に書き出してみる．

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))\\
=&\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{m+1}\left\{k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))(n+m)-(k-1)k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))\right\}\right]\\
=&\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{n}\left\{k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))(n+m)-(k-1)k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))\right\}\\
=&\frac{1}{m+1}\{(1\cdot2\cdot3\cdots m-0\cdot1\cdot2\cdots(m-1))+(2\cdot3\cdot4\cdots(m+1)-1\cdot2\cdot3\cdots m)+\cdots\\
&\cdots+(n(n+1)(n+2)\cdots m-(n-1)n(n+1)\cdots(n+(m-1)))\}
\end{aligned}$$

STEP6

相殺して消える部分ができるので，下のように消していくと，和が求まる．

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))\\
=&\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{m+1}\left\{k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))(n+m)-(k-1)k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))\right\}\right]\\
=&\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{n}\left\{k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))(n+m)-(k-1)k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))\right\}\\
=&\frac{1}{m+1}\{(\cancel{1\cdot2\cdot3\cdots m}-0\cdot1\cdot2\cdots(m-1))+(\cancel{2\cdot3\cdot4\cdots(m+1)}-\cancel{1\cdot2\cdot3\cdots m})+\cdots\\
&\cdots+(n(n+1)(n+2)\cdots m-\cancel{(n-1)n(n+1)\cdots(n+(m-1))})\}\\
=&\frac{1}{m+1}n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)
\end{aligned}$$

まとめておこう．

m 連続数の積の数列の和

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))=\frac{1}{m+1}n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)$$

第 2 章

漸化式

§ 2.1

漸化式の基本

第 1 章では数列の一般項に注目して話をすすめてきた．しかし p.2 で述べたように，一般項以外にも，1 つの数列を表現するのには漸化式という方法があった．そこで第**??**章では，さまざまな形の漸化式をとりあげ，漸化式と一般項を結びつけるための方法(漸化式から一般項を求める方法)を学ぶ.

2.1.1 漸化式の基本

■漸化式の基本

初項 5，公比 3 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は，第 1 章で学んだ通り，次のように表される.

$$a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$$

この数列を漸化式で表現すると，次のようになる.

$$a_{n+1} = 3a_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$a_1 = 5 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

ここで逆に，条件①，②が与えられた数列を考えると，②より初項が定まり，あとは①に順に $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ と代入することにより

$$a_2 = 3 \cdot a_1 = 15$$

$$a_3 = 3 \cdot a_2 = 45$$

$$a_4 = 3 \cdot a_3 = 135 \cdots$$

とただ一通りに数列 $\{a_n\}$ が定められる.

このように，数列のある項と別のある項との間に成り立つ関係式のことを，漸化式と定義していた.

【例題：漸化式から数列の項を求める（再掲）】

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第 5 項までを書き出せ.

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + n^2$　(2) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n + 2$

(3) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n + 2^n$　(4) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n + n$

(5) $a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$　(6) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 2}{a_n + 3}$

【解答】

(1)
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1 + 2^2 = 5$$
$$a_3 = 5 + 3^2 = 14$$
$$a_4 = 14 + 4^2 = 30$$
$$a_5 = 30 + 5^2 = 55$$

より，**1, 5, 14, 30, 55** である.

(2)
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$$
$$a_3 = 3 \cdot 8 + 2 = 26$$
$$a_4 = 3 \cdot 26 + 2 = 80$$
$$a_5 = 3 \cdot 80 + 2 = 242$$

より，**2, 8, 26, 80, 242** である.

(3)
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 5 \cdot 1 + 2 = 7$$
$$a_3 = 5 \cdot 7 + 2^2 = 39$$
$$a_4 = 5 \cdot 39 + 2^3 = 203$$
$$a_5 = 5 \cdot 203 + 2^4 = 1031$$

より，**1, 7, 39, 203, 1031** である.

(4)
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 5 \cdot 1 + 1 = 6$$
$$a_3 = 5 \cdot 6 + 2 = 32$$
$$a_4 = 5 \cdot \cdot 32 + 3 = 163$$
$$a_5 = 5 \cdot 163 + 4 = 819$$

より，**1, 6, 32, 163, 819** である.

(5)
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 5$$

$$a_3 = 5 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 13$$

$$a_4 = 5 \cdot 13 - 6 \cdot 5 = 35$$

$$a_5 = 5 \cdot 35 - 6 \cdot 13 = 97$$

より，**2, 5, 13, 35, 97** である．

(6)　$a_1 = 2$

$$a_2 = \frac{2 \cdot 2}{2+3} = \frac{6}{5}$$

$$a_3 = \frac{2 \cdot \frac{6}{5} + 2}{\frac{6}{5} + 3} = \frac{\frac{22}{5}}{\frac{21}{5}} = \frac{22}{21}$$

$$a_4 = \frac{2 \cdot \frac{22}{21} + 2}{\frac{22}{21} + 3} = \frac{\frac{86}{21}}{\frac{85}{21}} = \frac{86}{85}$$

$$a_5 = \frac{2 \cdot \frac{86}{85} + 2}{\frac{86}{85} + 3} = \frac{\frac{342}{85}}{\frac{341}{85}} = \frac{342}{341}$$

より，$\mathbf{2,\ \frac{6}{5},\ \frac{22}{21},\ \frac{86}{85},\ \frac{342}{341}}$ である．

実は上記の例題の問題は全て異なるタイプの漸化式となっている．以降では，それらをひとつひとつピックアップして学んでいく．その前に，それぞれの特徴を簡単に説明しておこう．

(1) 階差型漸化式

a_{n+1} と a_n の係数が同じであるタイプ．条件式から階差数列 $b_n = a_{n+1} - a_n$ の式を導くことができ，階差数列から一般項を求める．これについては『階差数列』(p.35) ですでに学んだ．

(2) 線形 2 項間漸化式

a_{n+1} と a_n の係数が異なっており，かつ定数が加えられるタイプ．特性方程式という特殊な方程式を活用し，一般項を求める．

(3) 変形階差型漸化式（r^n タイプ）

a_{n+1} と a_n の係数が異なっており，かつ r^n が加えられるタイプ．特性方程式か階差数列を利用して，一般項を求める．

(4) 変形階差型漸化式（n^k タイプ）

a_{n+1} と a_n の係数が異なっており，かつ n^k が加えられるタイプ．一般的には階差数列を利用して，一般項を求める．

(5) 線形 3 項間漸化式

a_{n+2} と a_{n+1} と a_n という 3 項による関係式が与えられるタイプ．3 項間漸化式の特性方程式を活用し，一般項を求める．

(6) 分数型漸化式

分数型となっているタイプ．一般的には分数型漸化式の特性方程式を活用し，一般項を求める．

なお漸化式の基本的な解き方として，等比数列の形に帰着させることを覚えておくと良い．以降では各タイプを具体的にみていくことにする．

§ 2.2

階差型漸化式：$a_{n+1} = a_n + f(n)$

p.58 の例題 (1) のように，a_{n+1} と a_n の係数が同じ漸化式のことを階差型漸化式と呼ぶ．ここでは階差型漸化式から一般項を求める方法を学ぶ．

2.2.1　階差型漸化式の解法

■階差型漸化式

次の問題について考えてみよう．

【例題：階差型漸化式〜その１〜】

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + n^2\ \ (n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

このようなタイプの漸化式は，a_n を移項して

$$\begin{aligned} & a_{n+1} = a_n + n^2 \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1} - a_n = n^2 \end{aligned}$$

と変形すると，数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項[1] が $b_n = n^2$ として与えられているものだと考えられる．

よって，階差数列の公式 (p.36) を利用してやれば，$n \geqq 2$ で

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= 1 + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \end{aligned}$$

となる．また，この式の右辺の n に 1 を代入すると，1 となり a_1 に一致するから，この式は $n = 1$ でも成立する．

以上から，$n \geqq 1$ で $a_n = 1 + \dfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ となる．

ポイントは「階差数列の一般項が与えられている」と気づくことである．

---

[1] 『階差数列の一般項』(p.37) を参照．

■階差型漸化式の解法

【例題：階差型漸化式〜その２〜】

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3n^2 + n\ \ (n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答】

漸化式 $a_{n+1} = a_n + 3n^2 + n$ を変形すると

$$a_{n+1} = a_n + 3n^2 + n \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} - a_n = 3n^2 + n$$

◀ 階差型漸化式の特徴は，a_{n+1} と a_n の係数が等しいことにある

となるので，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすれば

$$b_n = a_{n+1} - a_n = 3n^2 + n$$

であることがわかる.

ここで，$n \geqq 2$ のとき

◀ 階差数列の公式は，$n \geqq 2$ でないと使えない

◀『階差数列の一般項』(p.37)

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3k^2 + k \\ &= 1 + 3 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \frac{1}{2}(n-1)n \\ &= 1 + \frac{1}{2}(n-1)n\{(2n-1)+1\} \\ &= 1 + (n-1)n^2 \end{aligned}$$

この式の右辺の n に 1 を代入すると，1 となり，これは a_1 に一致する.

◀ $n = 1$ でもあてはまるか代入してチェックする

したがって，求める一般項は

$$\boldsymbol{a_n = 1 + (n-1)n^2}$$

階差型漸化式の解法

STEP1

漸化式 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ を次のように変形する．

$$a_{n+1} - a_n = f(n)$$

STEP2

このとき，式 $f(n)$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項となっているので，階差数列の公式を用いて a_n を求める．

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

STEP3

$n = 1$ での成立を忘れずにチェックして完成.

§ 2.3

線形 2 項間漸化式 : $a_{n+1} = pa_n + q$

p.58 の例題 (2) のように，a_{n+1} と a_n の係数が異なっており，かつ定数が加えられる漸化式のことを線形 2 項間漸化式と呼ぶ．ここでは線形 2 項間漸化式から一般項を求める方法を学ぶ.

2.3.1　線形 2 項間漸化式の解法

■線形 2 項間漸化式

次の問題について考えてみよう.

【例題 : 線形 2 項間漸化式～その１～】

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2\ \ (n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

まず，上の式の n に $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ n$ を代入し，具体的に数列を書き並べてみると

$$\begin{array}{rccccccccc} n: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n \\ \{a_n\}: & 1 & 5 & 17 & 53 & 161 & 485 & \cdots & \boxed{?} \end{array}$$

となるが，数列 $\{a_n\}$ は等差数列でも等比数列でもないので，$\boxed{?}$ の部分はすぐにはわからない.

■等比数列の漸化式に帰着させる

漸化式

$$a_{n+1} = 3a_n + 2 \qquad \cdots\cdots ①$$

において注目すべきは a_n の係数 (= 3) である．具体的に数列を書き並べていくと，数列 $\{a_n\}$ は約 3 倍ずつ増えていっていることがわかるだろう[*2].

しかしさきほど述べたように，純粋に 3 倍されているわけではないので等比数列ではない．原因は漸化式①で定数 (= 2) が加えられているためである．そこで，この定数をうまく消去して，最終的に等比数列の性質から一般項を求める方針で考えてみよう.

定数 (= 2) を消去するために，a_{n+1} と a_n を x に置きなおした等式[*3]を考える.

$$x = 3x + 2 \qquad \cdots\cdots ②$$

①と②の式を並べて引き算する.

[*2] 第 1 項から第 2 項は加えられている定数 2 の影響が大きいが，第 2 項以降については約 3 倍ずつ増えていることがみて取れる.

[*3] この等式を数列の**特性方程式** (characteristic equation) と呼ぶ

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1} & = & 3a_n \ + \ 2 \\ -) & x & = & 3x \ + \ 2 \\ \hline & a_{n+1} - x & = & 3(a_n - x) \end{array}$$

これで定数部分を消去することができた.

また，$a_n - x = b_n$ と置きなおすと，$b_{n+1} = 3b_n$ となることからもわかるように，等比数列の漸化式に帰着することができた.

■線形 2 項間漸化式の解法

【例題：線形 2 項間漸化式〜その２〜】

$a_1 = 1$，$a_{n+1} = 4a_n + 6$ $(n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答】

漸化式

$$a_{n+1} = 4a_n + 6$$

から，式

$$x = 4x + 6 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を辺々ひくと

$$a_{n+1} - x = p(a_n - x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，①を解くと

$$\begin{aligned} & x = 4x + 6 \\ \Leftrightarrow \quad & -3x = 6 \\ \therefore \quad & x = -2 \end{aligned}$$

となるから，②の x にこの値を代入し

$$a_{n+1} - (-2) = 3\{a_n - (-2)\}$$

◀ $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$

$$\therefore \ a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$$

◀ $b_n = a_n + 2$ とおくと $b_{n+1} = 3b_n$ と表せ，等比数列であることがわかる

を得る.

これは，数列 $\{a_n + 2\}$ が，初項 $(a_1 + 2) = 3$，公比 4 の等比数列であることを表している.

◀ 数列 $\{a_n + 2\}$ の初項は a_1 ではなく，$a_1 + 2$ である

よって

$$a_n + 2 = (a_1 + 2) \cdot 4^{n-1}$$

◀ 『等比数列の一般項』(p.16)

$$\therefore \ \boldsymbol{a_n = 3 \cdot 4^{n-1} - 2}$$

線形 2 項間漸化式の解法

STEP1

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ から方程式 $x = px + q$ をつくる.

STEP2

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ から方程式 $x = px + q$ を引き

$$a_{n+1} - x = p(a_n - x)$$

を得る.

STEP3

方程式の解 α を求め，STEP2 で得られた漸化式に代入する.

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$$

STEP4

等比数列の公式を用いて，漸化式を解き，a_n を求めれば完成.

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$$

$$\therefore\ a_n - \alpha = (a_1 - \alpha)p^{n-1}$$ ←等比数列の一般項の公式を用いた

よって，$a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha$ となる.

§ 2.4

変形階差型漸化式：$a_{n+1} = pa_n + f(n)$

p.58 の例題 (3)(4) のように a_{n+1} と a_n の係数が異なっており，かつ変数が加えられる漸化式のことを変形階差型漸化式と呼ぶ．ここでは変形階差型漸化式から一般項を求める方法を学ぶ.

2.4.1　変形階差型漸化式の解法

■変形階差型漸化式

階差型漸化式 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ と似ているが，a_n の前に係数 p $(p \fallingdotseq 1)$ がかかった形，つまり

$$a_{n+1} = pa_n + f(n)$$

という形をしている漸化式の解法について考えてみよう.

このようなタイプの漸化式は $f(n)$ の形により，解法を分類しておくのがよい.

以下，次の 2 タイプに分けて考えてみよう.

$$\begin{cases} f(n) = r^n & \text{(指数タイプ)} \\ f(n) = n^k \ \ (k \in \mathbb{N}) & \text{(k 次式タイプ)} \end{cases}$$

■$f(n) = r^n$ の場合の解法

【例題：変形階差型漸化式〜その１〜】

$a_1 = 1$，$a_{n+1} = 5a_n + 2^n$ $(n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答 1：線形 2 項間漸化式に帰着させる方法】

この解法では，漸化式 $a_{n+1} = pa_n + r^n$ の r の部分，つまりこの例題では 2 に着目して，漸化式を 2^{n+1} で割ることにより，線形 2 項間漸化式 (p.64) に帰着させる.

まず，漸化式 $a_{n+1} = 5a_n + 2^n$ の両辺を 2^{n+1} で割る.

$$\begin{aligned} &\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{5a_n}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{2^{n+1}} \\ \Leftrightarrow\ &\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{5a_n}{2 \cdot 2^n} + \frac{2^{\cancel{n}}}{2 \cdot 2^{\cancel{n}}} \\ \therefore\ &\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{a_n}{2^n} = b_n$ とおくと，漸化式は

$$b_{n+1} = \frac{5}{2}b_n + \frac{1}{2}$$

と変形される．この漸化式は線形 2 項間漸化式になっているので，以下その方法に準じて漸化式を解けばよい．

【解答 2：階差型漸化式に帰着させる方法】

この解法では，漸化式 $a_{n+1} = pa_n + r^n$ の p の部分，つまりこの例題では 5 に着目して，漸化式を 5^{n+1} で割ることにより，階差型漸化式 (p.61) に帰着させる．

まず，漸化式 $a_{n+1} = 5a_n + 2^n$ の両辺を 5^{n+1} で割る．

$$\begin{aligned} & \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{5a_n}{5^{n+1}} + \frac{2^n}{5^{n+1}} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{\cancel{5}a_n}{\cancel{5}\cdot 5^n} + \frac{2^n}{5\cdot 5^n} \\ \therefore\ & \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{a_n}{5^n} + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n \end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{a_n}{5^n} = b_n$ とおくと，漸化式は

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

と変形される．この漸化式は階差型漸化式になっているので，以下その方法に準じて漸化式を解けばよい．

【例題：変形階差型漸化式〜その１〜(再掲)】

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n + 2^n\ \ (n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

【解答 1：線形 2 項間漸化式に帰着させる方法】

漸化式 $a_{n+1} = 5a_n + 2^n$ の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\begin{aligned} & \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{5a_n}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{2^{n+1}} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{5a_n}{2\cdot 2^n} + \frac{2^{\cancel{n}}}{2\cdot 2^{\cancel{n}}} \\ \therefore\ & \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{5}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

◀ $2^{n+1} = 2\cdot 2^n$ である

◀ 線形 2 項間漸化式の形になっている

$$\underbrace{\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}}_{b_{n+1}} = \frac{5}{2}\cdot\underbrace{\frac{a_n}{2^n}}_{b_n} + \frac{1}{2}$$

$\dfrac{a_n}{2^n} = b_n$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は

$$b_{n+1} = \frac{5}{2}b_n + \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす．

ここで，方程式 $\alpha = \dfrac{5}{2}\alpha + \dfrac{1}{2}$ を解くと

$$\begin{aligned} & \alpha = \frac{5}{2}\alpha + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 2\alpha = 5\alpha + 1 \end{aligned}$$

$$\iff 3\alpha = -1$$

$$\therefore \alpha = -\frac{1}{3}$$

となるので，これを利用して①は

$$b_{n+1} = \frac{5}{2}b_n + \frac{1}{2}$$

$$\iff b_{n+1} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{2}\left\{b_n - \left(-\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$\therefore b_{n+1} + \frac{1}{3} = \frac{5}{2}\left(b_n + \frac{1}{3}\right)$$

◀
$$\begin{array}{rcl} b_{n+1} & = & 3b_n + 2 \\ -)\quad \alpha & = & 3\alpha + 2 \\ \hline b_{n+1} - \alpha & = & 3(b_n - \alpha) \end{array}$$
に，$\alpha = -\frac{1}{3}$ を代入

と変形できる．

これより，数列 $\left\{b_n + \frac{1}{3}\right\}$ は，初項 $\left(b_1 + \frac{1}{3}\right)$，公比 $\frac{5}{2}$ の等比数列とわかるので

$$\begin{aligned} b_n + \frac{1}{3} &= \left(b_1 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{a_1}{2^1} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{5}{6}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{5^n}{3 \cdot 2^n} \end{aligned}$$

◀『等比数列の一般項』(p.16)

◀ $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおいたので，$b_1 = \frac{a_1}{2^1}$ となる

ここで，$b_n = \frac{a_n}{2^n}$ であったから，もとに戻して

$$\frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{3} = \frac{5^n}{3 \cdot 2^n}$$

$$\iff \frac{a_n}{2^n} = \frac{5^n}{3 \cdot 2^n} - \frac{1}{3}$$

$$\therefore a_n = \frac{5^n}{3} - \frac{2^n}{3}$$

◀ ここから a_n について解く

【解答 2：階差型漸化式に帰着させる方法】

漸化式 $a_{n+1} = 5a_n + 2^n$ の両辺を 5^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{5a_n}{5^{n+1}} + \frac{2^n}{5^{n+1}}$$

$$\iff \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{\cancel{5}a_n}{\cancel{5} \cdot 5^n} + \frac{2^n}{5 \cdot 5^n}$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{a_n}{5^n} + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

◀ $5^{n+1} = 5 \cdot 5^n$ である

◀ 階差型漸化式の形になっている
$$\underbrace{\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}}_{b_{n+1}} = \underbrace{\frac{a_n}{5^n}}_{b_n} + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$\dfrac{a_n}{5^n} = b_n$ とおくと

$$\begin{aligned} & b_{n+1} = b_n + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n \\ \Leftrightarrow\ & b_{n+1} - b_n = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n \end{aligned}$$

この漸化式より，数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすれば，$c_n = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ となっていることがわかるので，$2 \leqq n$ では

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= \frac{a_1}{5^1} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^k \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^k \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{\frac{2}{5}\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{5}} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{2}{15}\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{2}{15} - \frac{2}{15}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{15}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2^n}{3\cdot 5^n} \end{aligned}$$

◀『階差数列の一般項』(p.37)

◀『等比数列の和』(p.19)

この式の右辺の n に 1 を代入すると，1 となり，a_1 と一致するので，この式は $n = 1$ のときにも成立する．

◀ 階差数列の公式を使った場合は $n = 1$ を必ずチェックする

よって $n \geqq 1$ で

$$b_n = \frac{1}{3} - \frac{2^n}{3\cdot 5^n}$$

が成り立つ．ここで，$b_n = \dfrac{a_n}{5^n}$ であったから

$$\begin{aligned} & \frac{a_n}{5^n} = \frac{1}{3} - \frac{2^n}{3\cdot 5^n} \\ \therefore\ & a_n = \frac{5^n}{3} - \frac{2^n}{3} \end{aligned}$$

$f(n) = r^n$ タイプの変形階差型漸化式の解法

変形階差型漸化式 $a_{n+1} = pa_n + r^n$ について．

【解答 1：線形 2 項間漸化式に帰着させる方法】

STEP1

漸化式の両辺を，r^{n+1} で割ることにより

$$\underbrace{\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}}}_{b_{n+1}} = \frac{p}{r} \cdot \underbrace{\frac{a_n}{r^n}}_{b_n} + \frac{q}{r}$$

として，線形 2 項間漸化式を導く．

STEP2

(以下，線形 2 項間漸化式の解法 (p.**??**) に準じる)

【解答 2：階差型漸化式に帰着させる方法】

STEP1

漸化式の両辺を，p^{n+1} で割ることにより

$$\underbrace{\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}}_{b_{n+1}} = \underbrace{\frac{a_n}{p^n}}_{b_n} + \frac{q}{p} \cdot \left(\frac{r}{p}\right)^n$$

として，階差型漸化式を導く．

STEP2

（以下，階差型漸化式の解法 (p.62) に準じる）

■$f(n) = n^k$　$(k \in \mathbb{N})$ の場合の解法

【例題：変形階差型漸化式〜その２〜】

$a_1 = 1$，$a_{n+1} = 5a_n + n$　$(n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

【解答 1：等比数列に帰着させる方法】

この解法では，漸化式 $a_{n+1} = pa_n + n^k$ の k の部分 (整式 $f(n)$ の次数)，つまりこの例題では 1 に着目して，適当な 1 次式を用いて漸化式を変形することにより，等比数列に帰着させる[*4]．

具体的には次のようにする．

n の 1 次式 $g(n) = sn + t$ を用いて，漸化式 $a_{n+1} = 5a_n + n$ が

$$a_{n+1} - \{\underbrace{s(n+1)+t}_{g(n+1)}\} = 5\{a_n - \underbrace{(sn+t)}_{g(n)}\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と変形できたとすれば，$b_n = a_n - (sn + t)$ とおくことにより，漸化式は

$$b_{n+1} = 5b_n$$

[*4] もし k が 2 なら，適当な 2 次式を用いて漸化式を変形する．

と変形される．この漸化式は等比数列を表しているので，以下その方法に準じて漸化式を解けばよい．

このような s，t を求めるためには，①を展開・整理して

$$\begin{aligned} & a_{n+1}-\{s(n+1)+t\}=5\{a_n-(sn+t)\} \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1}=5\{a_n-(sn+t)\}+\{s(n+1)+t\} \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1}=5a_n-5(sn+t)+s(n+1)+t \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1}=5a_n-5sn-5t+sn+s+t \\ \therefore\ & a_{n+1}=5a_n-4sn+(s-4t) \end{aligned}$$

としておいて，これと漸化式 $a_{n+1}=5a_n+n$ を比較して

$$\begin{cases} -4s=1 \\ s-4t=0 \end{cases}$$

を解けばよい．

【解答 2：階差型漸化式に帰着させる方法】

この解法では，漸化式 $a_{n+1}=pa_n+n^k$ の p の部分，つまりこの例題では 5 に着目して，漸化式を 5^{n+1} で割ることにより，階差型漸化式 (p.61) に帰着させる．

具体的には次のようにする．

まず，漸化式 $a_{n+1}=5a_n+n$ の両辺を 5^{n+1} で割る．

$$\begin{aligned} & \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{5a_n}{5^{n+1}}+\frac{n}{5^{n+1}} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{\cancel{5}a_n}{\cancel{5}\cdot 5^n}+\frac{n}{5^{n+1}} \\ \therefore\ & \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{a_n}{5^n}+n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{a_n}{5^n}=b_n$ とおくと，漸化式は

$$b_{n+1}=b_n+n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

と変形される．この漸化式は階差型漸化式になっているので，以下その方法に準じて漸化式を解けばよい．

【例題：変形階差型漸化式〜その２〜（再掲）】

$a_1=1$, $a_{n+1}=5a_n+n$ $(n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

【解答 1：等比数列に帰着させる方法】

漸化式 $a_{n+1}=5a_n+n$ を変形して

$$\begin{aligned} & a_{n+1}=5a_n+n \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1}-\underbrace{\{s(n+1)+t\}}_{g(n+1)}=5\{a_n-\underbrace{(sn+t)}_{g(n)}\} \end{aligned}$$

◀ $f(n)$ が 1 次式であることに着目して，同じ 1 次式 $sn+t$ を考える

となるような，s, $t \in \mathbb{R}$ を求める．

そのためには，まずこの式を展開・整理して

$$a_{n+1} - \{s(n+1) + t\} = 5\{a_n - (sn+t)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

◀ この式を整理して，$a_{n+1} = 5a_n +$ ○ $n +$ △ という形に変形していく

$$\Leftrightarrow \ a_{n+1} = 5\{a_n - (sn+t)\} + \{s(n+1) + t\}$$
$$\Leftrightarrow \ a_{n+1} = 5a_n - 5(sn+t) + s(n+1) + t$$
$$\Leftrightarrow \ a_{n+1} = 5a_n - 5sn - 5t + sn + s + t$$
$$\therefore \ a_{n+1} = 5a_n - 4sn + (s-4t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

◀ $a_{n+1} = 5a_n +$ ○ $n +$ △ という形になった

この③と，もとの漸化式 $a_{n+1} = 5a_n + n$ を比べて

◀ $a_{n+1} = 5a_n - 4sn + (s-4t)$ と $a_{n+1} = 5a_n + n$ を比較する

$$\begin{cases} -4s = 1 & \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \\ s - 4t = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

を解けばよい．

まず，④より $s = -\dfrac{1}{4}$ であり，これを⑤に代入して

$$-\frac{1}{4} - 4q = 0$$
$$\Leftrightarrow \ t = -\frac{1}{16}$$

を得る．この s，t を②に代入して

$$a_{n+1} - \left\{-\frac{1}{4}(n+1) - \frac{1}{16}\right\} = 5\left\{a_n - \left(-\frac{1}{4}n - \frac{1}{16}\right)\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

◀ $a_n - \left(-\dfrac{1}{4}n - \dfrac{1}{16}\right) = b_n$ とおくと，この式は $b_{n+1} = 5b_n$ の等比数列となっている．

を得る．

ここで，$b_n = a_n - \left(-\dfrac{1}{4}n - \dfrac{1}{16}\right)$ とおくと，⑥は

$$b_{n+1} = 5b_n$$

となり，数列 $\{b_n\}$ は初項

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{21}{16} \end{aligned}$$

公比 5 の等比数列となるのがわかる．

よって

$$b_n = b_1 \cdot 5^{n-1}$$

◀ 『等比数列の一般項』(p.16)

$$= \frac{21}{16}\cdot 5^{n-1}$$

$b_n = a_n - \left(-\frac{1}{4}n - \frac{1}{16}\right)$ であったから

◀ 置き換えていたのでもとに戻す

$$a_n - \left(-\frac{1}{4}n - \frac{1}{16}\right) = \frac{21}{16}\cdot 5^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n = -\frac{1}{4}n - \frac{1}{16} + \frac{21}{16}\cdot 5^{n-1}$$

◀ a_n について解いて完成

【解答 2：階差型漸化式に帰着させる方法】

漸化式 $a_{n+1} = 5a_n + n$ の両辺を 5^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{5a_n}{5^{n+1}} + \frac{n}{5^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{\cancel{5}a_n}{\cancel{5}\cdot 5^n} + n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

◀ $5^{n+1} = 5\cdot 5^n$ である

$$\therefore\ \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{a_n}{5^n} + n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

◀ 階差型漸化式の形になっている

$$\underbrace{\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}}_{b_{n+1}} = \underbrace{\frac{a_n}{5^n}}_{b_n} + n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

$b_n = \frac{a_n}{5^n}$ とおくと

$$b_{n+1} = b_n + n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow\ b_{n+1} - b_n = n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

この漸化式より，数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすれば，$c_n = n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$ となっていることがわかるので，$n \geqq 2$ では

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$$

◀ 『階差数列の一般項』(p.37)

$$= \frac{a_1}{5^1} + \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}$$

◀ ∑(等差) × (等比) の形をしている

$$= \frac{1}{5} + \overbrace{\sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}}^{A\ とおく} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで

$$\begin{array}{rl} A & = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots + (n-1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n \\ -)\ \frac{1}{5}A & = \qquad\qquad\quad \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots + (n-2)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n + (n-1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \\ \hline \frac{4}{5}A & = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^n - (n-1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \end{array}$$

より

$$\frac{4}{5}A$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^n - (n-1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{5}} - (n-1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \\
&= \frac{1}{20}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\} - (n-1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \\
&= \frac{1}{20} - \frac{1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - \frac{n-1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n \\
&= \frac{1}{20} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{n-1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n \\
&= \frac{1}{20} - \left(\frac{1}{4}+\frac{n-1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^n \\
&= \frac{1}{20} - \frac{5+4n-4}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^n \\
&= \frac{1}{20} - \frac{4n+1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^n
\end{aligned}
$$

◀『等比数列の和』(p.19)

◀ ここからの計算は $\left(\frac{1}{5}\right)^n$ でくくるためのものである

よって

$$A = \frac{1}{16} - \frac{4n+1}{16}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

であるから，①は

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{5} + \frac{1}{16} - \frac{4n+1}{16}\left(\frac{1}{5}\right)^n \\
&= \frac{21}{80} - \frac{4n+1}{16}\left(\frac{1}{5}\right)^n
\end{aligned}
$$

ここで，$b_n = \dfrac{a_n}{5^n}$ であったから

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_n}{5^n} = \frac{21}{80} - \frac{4n+1}{16}\left(\frac{1}{5}\right)^n \\
\Leftrightarrow\ & a_n = \frac{21}{80}\cdot 5^n - \frac{4n+1}{16} \\
\therefore\ & a_n = -\frac{1}{4}n - \frac{1}{16} + \frac{21}{16}5^{n-1}
\end{aligned}
$$

この式の右辺の n に 1 を代入すると，1 となり，a_1 と一致するので，この式は $n = 1$ のときにも成立する．

◀ 階差数列の公式を使った場合は $n = 1$ を必ずチェックする

$f(n) = n^k \ (k \in \mathbb{N})$ タイプの変形階差型漸化式の解法

変形階差型漸化式 $a_{n+1} = pa_n + n^k \ (k \in \mathbb{N})$ について.

【解答 1：等比数列に帰着させる方法】

STEP1

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + n^k$ を変形して

$$a_{n+1} - g(n+1) = p\{a_n - g(n)\}$$

となるような，k 次式 $g(n)$ を求める.

STEP2

(以下，等比数列の一般項の求め方 (p.15) に準じる)

【解答 2：階差型漸化式に帰着させる方法】

STEP1

漸化式の両辺を，p^{n+1} で割ることにより

$$\underbrace{\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}}_{b_{n+1}} = \underbrace{\frac{a_n}{p^n}}_{b_n} + n\left(\frac{1}{p}\right)^{n+1}$$

として，階差型漸化式を導く.

STEP2

(以下，階差型漸化式の解法 (p.62) に準じる)

§ 2.5

線形3項間漸化式 : $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$

p.58 の例題 (5) のように，a_{n+2} と a_{n+1} と a_n の 3 項による関係式が与えられる漸化式のことを線形 3 項間漸化式と呼ぶ．ここでは線形 3 項間漸化式から一般項を求める方法を学ぶ.

2.5.1　線形 3 項間漸化式の解法

■線形 3 項間漸化式

次の問題について考えてみよう.

【例題】

$a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n\ \ (n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

まず，上の式の n に $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots, n$ を代入し，具体的に数列を書き並べてみると

$$\begin{aligned} a_3 &= 5a_2 - 6a_1 = 5 \times 5 - 6 \times 2 = 13 \\ a_4 &= 5a_3 - 6a_2 = 5 \times 13 - 6 \times 5 = 35 \\ a_5 &= 5a_4 - 6a_3 = 5 \times 25 - 6 \times 13 = 97 \\ a_6 &= 5a_5 - 6a_4 = 5 \times 97 - 6 \times 35 = 275 \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

より $\begin{array}{rccccccccc} n: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n \\ \{a_n\}: & 2 & 5 & 13 & 35 & 97 & 275 & \cdots & \boxed{?} \end{array}$ となるが，数列 $\{a_n\}$ は等差数列でも等比数列でもないので，$\boxed{?}$ の部分はすぐにはわからない.

■等比数列の漸化式に帰着させる

線形 2 項間漸化式のときのように線形 3 項間漸化式でも等比数列に帰着させて，一般項を求める方針で考えてみよう.

$$pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

漸化式①を等比数列型漸化式[*5]②に変形することができれば，数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ の一般項を求めることができる.

[*5] $a_{n+1} - \alpha a_n = b_n$ と置き換えれば，②は $b_{n+1} = \beta b_n$ となっていることがわかる.

なお，α，β を 3 項間漸化式における特性方程式の解と呼ぶ．α，β は次の方程式から求める．

$$px^2 + qx + r = 0$$

実際の解法は例題を使って確認しよう．

■線形 3 項間漸化式の解法

【例題】

$a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n\ \ (n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答】

漸化式 $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ は，方程式

$$x^2 = 5x - 6$$

を満たす x，つまり

$$\begin{aligned} & x^2 - 5x + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)(x-3) = 0 \\ \therefore\ & x = 2,\ 3 \end{aligned}$$

を用いて

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3\,(a_{n+1} - 2a_n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$
$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2\,(a_{n+1} - 3a_n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と 2 通りに変形できる．

1) ①について

$b_n = a_{n+1} - 2a_n$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は $b_{n+1} = 3b_n$ を満たすので

$$\begin{aligned} & b_n = b_1 \cdot 3^{n-1} \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1} - 2a_n = (a_2 - 2a_1)3^{n-1} \\ \therefore\ & a_{n+1} - 2a_n = 3^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①' \end{aligned}$$

◀『等比数列の一般項』(p.16)

2) ②について

$c_n = a_{n+1} - 3a_n$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は $c_{n+1} = 2c_n$ を満たすので

$$\begin{aligned} & c_n = c_1 \cdot 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1} - 3a_n = (a_2 - 3a_1)2^{n-1} \end{aligned}$$

◀『等比数列の一般項』(p.16)

$$\therefore\ a_{n+1} - 3a_n = -2^{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②'$$

①$'$ − ②$'$ より

$$a_n = 3^{n-1} + 2^{n-1}$$

解法をまとめておこう．

線形 3 項間漸化式の解法

STEP1

漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ から**特性方程式** $x^2 = px + q$ をつくる．

STEP2

特性方程式の解 $x = \alpha$，β を利用して，漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ を

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$
$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$$

と 2 通りに変形する．

STEP3

$b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$，$c_n = a_{n+1} - \beta a_n$ とおき，2 本の漸化式を書き換えて

$$b_{n+1} = \beta b_n$$
$$c_{n+1} = \alpha c_n$$

等比数列の一般項の公式を使い，数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項を求める．

$$b_n = b_1\beta^{n-1}$$
$$c_n = c_1\alpha^{n-1}$$

STEP4

置き換えた数列をもとに戻して

$$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}$$
$$a_{n+1} - \beta a_n = (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1}$$

a_{n+1} を消すため，辺々引き算する．

$$-\alpha a_n - (-\beta a_n) = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1} - (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1}$$
$$\Leftrightarrow\ (\beta - \alpha)a_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1} - (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1}$$

STEP5

a_n について解けば完成．

$$a_n = \frac{a_2 - \alpha a_1}{\beta - \alpha}\beta^{n-1} - \frac{a_2 - \beta a_1}{\beta - \alpha}\alpha^{n-1}$$

線形 3 項間漸化式を解くのに，特性方程式 $x^2 = px + q$ を使うとよいのはわかったが，この特性方程式はいったいどのような考え方からくるのだろうか．ここでは，それを検証する．

線形 3 項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ を解くために，「等比数列に帰着させる」ことを考えていた．等比数列に帰着させるためには，適当な数 α，β を用いて，線形 3 項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ を

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と変形したい．なぜなら，このように変形できれば，数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は等比数列になるからである．

では，このような α，β はどのように求めればよいのかというと，①を展開・整理した式

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$$

と，もともとの漸化式

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$$

の係数を比較して

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= p \\ \alpha\beta &= -q \end{aligned}$$

を満たすような α，β であればよい．

このような α，β を求めるためには，解と係数の関係の逆より

$$x^2 - px - q = 0$$

という 2 次方程式を解けばよい．

ここで，この方程式を解くのではなく，変形すると

$$x^2 = px + q$$

となるが，これは線形 3 項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ の a_{n+2} を x^2，a_{n+1} を x，a_n を 1 に形式的に置き換えたものに他ならない．そして，この方程式を特性方程式と名付けるのである．

結局，線形 3 項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ は，特性方程式 $x^2 = px + q$ の解 α，β を用いて

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

と変形され，等比数列に帰着されるのである．

§ 2.6

分数漸化式：$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$

p.58 の例題 (6) のように分数型となっている漸化式のことを分数型漸化式と呼ぶ．ここでは分数型漸化式から一般項を求める方法を学ぶ．

■分数型漸化式の解法

分数型漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ について，$ps=qr$ のときには約分ができるので，約分が終えた形，つまり $ps \fallingdotseq qr$ のもとで考える．

■簡単な分数型漸化式（$q=0$ の場合）

分数型漸化式が $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{ra_n+s}$ のような形をしている場合は，両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{ra_n+s}{pa_n}$$

$$\therefore\ \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{s}{p}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{r}{p}$$

と変形し，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくことにより

$$b_{n+1}=\frac{s}{p}\cdot b_n+\frac{r}{p}$$

となり線形 2 項間漸化式へ帰着される．

【解答 1：等比数列に帰着させる方法】

分数型漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の

t に関する

$$t=\frac{pt+q}{rt+s}$$

という方程式が異なる 2 つの実数解 $t=\alpha,\beta$ をもつとき

$$b_n=\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$$

とおくと，$\{b_n\}$ が等比数列となることを利用する．

【解答 2：簡単な分数型漸化式に帰着させる方法】

t に関する

$$t=\frac{pt+q}{rt+s}$$

という方程式が実数解 t をもつとき (2 解あるときはどちらでもよい)，この式より t は

$$\begin{aligned} & t = \frac{pt+q}{rt+s} \\ \Leftrightarrow\ & t(rt+s) = pt+q \\ \Leftrightarrow\ & (p-rt)t = st-q \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となるのを利用して，$a_{n+1} - t$ を計算すると

$$\begin{aligned} a_{n+1} - t &= \frac{pa_n+q}{ra_n+s} - t \\ &= \frac{pa_n+q-t(ra_n+s)}{ra_n+s} \\ &= \frac{(p-rt)a_n-(st-q)}{ra_n+s} \\ &= \frac{(p-rt)a_n-(p-rt)t}{ra_n+s} \qquad \because ① \\ &= \frac{(p-rt)(a_n-t)}{ra_n+s} \end{aligned}$$

となる．ここで，$b_n = a_n - t$ とおくと

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{(p-rt)b_n}{r(b_n+t)+s} \\ &= \frac{(p-rt)b_n}{rb_n+(rt+s)} \end{aligned}$$

となり，簡単な分数型漸化式 ($q = 0$ の場合) に帰着される．

■簡単な分数型漸化式の解法

【例題：分数漸化式〜その１〜】

$a_1 = \dfrac{1}{2}$，$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4a_n+5}$ $(n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

【解答】

漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4a_n+5}$ の逆数をとると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4a_n+5}{a_n} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{a_{n+1}} = 5 \cdot \frac{1}{a_n} + 4 \end{aligned}$$

となるので，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は

$$b_{n+1} = 5b_n + 4 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

◀ 線形 2 項間漸化式に帰着された

を満たす．

ここで，$\alpha = 5\alpha + 4$ を満たす α つまり，$\alpha = -1$ を用いて ① は

$$b_{n+1} + \alpha = 5\,(b_n + 1)$$

◀ $$\begin{array}{rrcl} & b_{n+1} & = & 5b_n + 4 \\ -) & \alpha & = & 5\alpha + 4 \\ \hline & b_{n+1} - \alpha & = & 5(b_n - \alpha) \end{array}$$
に，特性方程式の解 $\alpha = -1$ を代入

と変形できる．$c_n = b_n + 1$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は

$$c_{n+1} = 5c_n$$

◀ 等比数列に帰着された

を満たすので，c_n は

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 5^{n-1} \\ &= (b_1 + 1)5^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{a_1} + 1\right)5^{n-1} \\ &= 3 \cdot 5^{n-1} \end{aligned}$$

$c_n = b_n + 1$ であったから

$$b_n + 1 = 3 \cdot 5^{n-1}$$
$$\therefore\ b_n = 3 \cdot 5^{n-1} - 1$$

◀ c_n を b_n の式に戻す

さらに，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ であったから

$$\frac{1}{a_n} = 3 \cdot 5^{n-1} - 1$$
$$\therefore\ a_n = \frac{1}{3 \cdot 5^{n-1} - 1}$$

◀ b_n を a_n の式に戻す

簡単な分数漸化式の解法

STEP1

漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{pa_n}{ra_n + s}$ の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{ra_n + s}{pa_n}$$
$$\therefore\ \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{s}{p} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{r}{p}$$

と変形する．

STEP2

(以下，3 項間漸化式 (p.77) の解法に準じる)

■一般の分数型漸化式の解法

【例題：分数漸化式〜その２〜】

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n+2}{a_n+3}$ $(n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答 1：等比数列に帰着させる方法】

まず，特性方程式 $t = \dfrac{2t+2}{t+3}$ を解く.

$$t = \frac{2t+2}{t+3} \iff t(t+3) = 2t+2$$
$$\iff t^2+t-2=0 \iff (t+2)(t-1)=0$$
$$\therefore\ t = -2,\ 1$$

この異なる 2 解を利用して，$b_n = \dfrac{a_n-1}{a_n+2}$ とおくと

◀ 2 解 α，β を用いて $b_n = \dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$ とおくと，b_n は必ず等比数列になる

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+2} \\ &= \frac{\dfrac{2a_n+2}{a_n+3}-1}{\dfrac{2a_n+2}{a_n+3}+2} \\ &= \frac{a_n-1}{4a_n+8} \\ &= \frac{a_n-1}{4(a_n+2)} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{a_n-1}{a_n+2} \\ &= \frac{1}{4}\cdot b_n \end{aligned}$$

◀ ここから $b_n = \dfrac{a_n-1}{a_n+2}$ の塊をくくりだすのがポイント

◀ くくりだせた

◀ 数列 $\{b_n\}$ は等比数列になっている

となり，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \dfrac{a_1-1}{a_1+2} = \dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列となるので

$$b_n = b_1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

ここで，$b_n = \dfrac{a_n-1}{a_n+2}$ であったから

$$b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$\iff \frac{a_n-1}{a_n+2} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$\iff (a_n-1)4^n = a_n+2 \iff (4^n-1)a_n = 4^n+2$$

◀ b_n を a_n の式に戻した

$$\therefore\ a_n = \frac{4^n + 2}{4^n - 1}$$

【解答 2：簡単な分数型漸化式に帰着させる方法】

まず，特性方程式 $t = \dfrac{2t+2}{t+3}$ を解く．

$$\begin{aligned}
& t = \frac{2t+2}{t+3} \\
\Leftrightarrow\ & t(t+3) = 2t+2 \\
\Leftrightarrow\ & t^2 + t - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (t+2)(t-1) = 0 \\
\therefore\ & t = -2,\ 1
\end{aligned}$$

この解の 1 つ $t = 1$ を利用して

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - 1 &= \frac{2a_n + 2}{a_n + 3} - 1 \\
&= \frac{2a_n + 2 - (a_n + 3)}{a_n + 3} \\
&= \frac{a_n - 1}{a_n + 3} \\
&= \frac{a_n - 1}{(a_n - 1) + 4}
\end{aligned}$$

と変形できる．この漸化式の逆数をとって

◀ 解答 2 では，2 解のうち片方しか利用せず，どちらを利用してもかまわない

◀ 通分した

◀ $a_n - 1$ を塊とみて，簡単な分数漸化式 (p.81) に帰着させるのがポイント

◀ $a_n - 1 = c_n$ とおくと $c_{n+1} = \dfrac{c_n}{c_n + 4}$ となり，簡単な分数漸化式に帰着されているのがよくわかる

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_{n+1} - 1} &= \frac{(a_n - 1) + 4}{a_n - 1} \\
&= \frac{4}{a_n - 1} + 1
\end{aligned}$$

$b_n = \dfrac{1}{a_n - 1}$ とおくと

$$b_{n+1} = 4b_n + 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

◀ 線形 2 項間漸化式に帰着された

となる．

ここで，$\alpha = 4\alpha + 1$ を満たす α つまり，$\alpha = -\dfrac{1}{3}$ を用いて ① は

$$b_{n+1} + \frac{1}{3} = 4\left(b_n + \frac{1}{3}\right)$$

と変形できる．さらに，$c_n = b_n + \dfrac{1}{3}$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は

◀ $\begin{array}{rcl} b_{n+1} & = & 4b_n + 1 \\ -)\quad \alpha & = & 4\alpha + 1 \\ \hline b_{n+1} - \alpha & = & 4(b_n - \alpha) \end{array}$

に，特性方程式の解 $\alpha = -\dfrac{1}{3}$ を代入

$$c_{n+1} = 5c_n$$

◀ 等比数列に帰着された

を満たすので，c_n は

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 4^{n-1} \\ &= \left(b_1 + \frac{1}{3}\right)4^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{3}\right)4^{n-1} \\ &= \frac{4}{3} \cdot 4^{n-1} \\ &= \frac{1}{3}4^n \end{aligned}$$

$c_n = b_n + \dfrac{1}{3}$ であったから

$$\begin{aligned} & b_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}4^n \\ \Leftrightarrow\ & b_n = \frac{1}{3}4^n - \frac{1}{3} \\ \therefore\ & b_n = \frac{4^n - 1}{3} \end{aligned}$$

◀ c_n を b_n の式に戻した

さらに，$b_n = \dfrac{1}{a_n - 1}$ であったから

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_n - 1} = \frac{4^n - 1}{3} \\ \Leftrightarrow\ & a_n - 1 = \frac{3}{4^n - 1} \\ \Leftrightarrow\ & a_n = \frac{3}{4^n - 1} + 1 \\ \Leftrightarrow\ & a_n = \frac{3 + 4^n - 1}{4^n - 1} \\ \therefore\ & a_n = \frac{4^n + 2}{4^n - 1} \end{aligned}$$

◀ b_n を a_n の式に戻した

◀ 通分した

§ 2.7

連立漸化式 $\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$

これまで 1 つの漸化式から一般項を求める方法について勉強してきた．ここでは漸化式の数を増やして，2 つの連立漸化式から一般項を求める方法を学ぶ.

2.7.1 連立漸化式の解法

■連立漸化式

まず連立漸化式の形について簡単に説明しよう.

これまでの漸化式は 1 つの数列 $\{a_n\}$ についての式であったが，ここで学ぶ連立漸化式では 2 つの数列が登場する.

連立漸化式では一般的に，a_{n+1} と b_{n+1} がそれぞれ a_n と b_n から成り立つ式を与えられるので，そこから数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めることになる.

一般項を求める方法としては,

(1) 連立方程式をうまく組み合わせて等比数列に帰着させる方法
(2) 3 項間漸化式に帰着させる方法

が存在する.

下記ではそれぞれについて解説していく．なお，その前に連立漸化式の係数についての注意事項を先に述べておこう.

■連立漸化式の係数についての注意

連立漸化式 $\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases} \quad (p,\ q,\ r,\ s \fallingdotseq 0)$

について，$ps = qr$ のときには，$\dfrac{s}{q} = \dfrac{r}{p} = k$ とおいて

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = pka_n + qkb_n \end{cases}$$

より，$a_{n+1} = kb_{n+1}$ となるから，$a_n = kb_n$ であり，これを上の式に用いて

$$kb_{n+1} = pkb_n + qb_n \iff b_{n+1} = \left(p + \frac{q}{k}\right)b_n$$

となり，等比数列の漸化式に帰着されるので，以下 $ps \fallingdotseq qr$ の場合について考える.

■連立漸化式の解法

【解答 1：等比数列に帰着させる方法】

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

x を後から決める定数として，① + ② × x より

$$a_{n+1} + xb_{n+1} = (p + rx)a_n + (q + sx)b_n$$

をつくり，$1 : x = (p + rx) : (q + sx)$ となるように x を定め，その値が異なる α, β ならば

$$\begin{cases} a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = (p + r\alpha)(a_n + \alpha b_n) \\ a_{n+1} + \beta b_{n+1} = (p + r\beta)(a_n + \beta b_n) \end{cases}$$

となり，等比数列の漸化式に帰着されることを利用する．

【解答 2：3 項間漸化式に帰着させる方法】

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

③ より

$$b_n = \frac{1}{q}a_{n+1} - \frac{p}{q}a_n$$
$$b_{n+1} = \frac{1}{q}a_{n+2} - \frac{p}{q}a_{n+1}$$

となるので，この 2 式を ④ に用いて 3 項間漸化式に帰着されることを利用する．

【例題：連立漸化式】

$\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = -2a_n + 5b_n \end{cases}$ $(n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ および数列 $\{b_n\}$ の一般項 a_n および b_n を n の式で表せ．

【解答 1：等比数列に帰着させる方法】

漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \\ b_{n+1} = -2a_n + 5b_n & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

において，⑤ + x × ⑥ より

$$a_{n+1} + xb_{n+1} = 2a_n + b_n + x(-2a_n + 5b_n)$$
$$\Leftrightarrow\ a_{n+1} + xb_{n+1} = (2 - 2x)a_n + (1 + 5x)b_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

ここで

$$1 : x = 2 - 2x : 1 + 5x$$

となる x を求める，つまり方程式 $x(2-2x) = 1+5x$ を解くと

$$\begin{aligned} & x(2-2x) = 1+5x \\ \Leftrightarrow\ & 2x - 2x^2 = 1+5x \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 + 3x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+1)(2x+1) = 0 \\ \therefore\ & x = -1,\ -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるので，これらの値のとき数列 $\{a_n + xb_n\}$ は等比数列となる．

i) $x = -1$ のとき

⑦は

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 4(a_n - b_n)$$

となるので，$c_n = a_n - b_n$ とおくと

$$c_{n+1} = 4c_n$$

◀ 等比数列に帰着された

より，数列 $\{c_n\}$ は，初項 $c_1 = a_1 - b_1 = -3$，公比 4 の等比数列となっている．よって

$$\begin{aligned} c_n =& c_1 4^{n-1} \\ =& -3 \cdot 4^{n-1} \end{aligned}$$

ここで，$c_n = a_n - b_n$ であったから

$$c_n = -3 \cdot 4^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n - b_n = -3 \cdot 4^{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

ii) $x = -\frac{1}{2}$ のとき

⑦は

$$a_{n+1} - \frac{1}{2}b_{n+1} = 3\left(a_n - \frac{1}{2}b_n\right)$$

となるので，$d_n = a_n - \frac{1}{2}b_n$ とおくと

$$d_{n+1} = 3d_n$$

◀ 等比数列に帰着された

より，数列 $\{d_n\}$ は，初項 $d_1 = a_1 - \frac{1}{2}b_1 = -1$，公比 3 の等比数列となっている．よって

$$\begin{aligned} d_n &= d_1 3^{n-1} \\ &= -3^{n-1} \end{aligned}$$

ここで，$d_n = a_n - \frac{1}{2}b_n$ であったから

$$d_n = -1 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n - \frac{1}{2}b_n = -3^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

⑨ − ⑧ より

$$\begin{aligned} & a_n - \frac{1}{2}b_n - (a_n - b_n) = -3^{n-1} - \left(-3 \cdot 4^{n-1}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}b_n = -3^{n-1} + 3 \cdot 4^{n-1} \\ \therefore\ & b_n = -2 \cdot 3^{n-1} + 6 \cdot 4^{n-1} \end{aligned}$$

また，これを⑧に代入して

$$\begin{aligned} & a_n - \left(-2 \cdot 3^{n-1} + 6 \cdot 4^{n-1}\right) = -3 \cdot 4^{n-1} \\ \Leftrightarrow\ & a_n = -3 \cdot 4^{n-1} + \left(-2 \cdot 3^{n-1} + 6 \cdot 4^{n-1}\right) \\ \therefore\ & a_n = -2 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 4^{n-1} \end{aligned}$$

【解答 2：線形 3 項間漸化式に帰着させる方法】

漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ b_{n+1} = -2a_n + 5b_n & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

において，①より

$$b_n = a_{n+1} - 2a_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

また，この式で n のかわりに $n+1$ とおくと

$$b_{n+1} = a_{n+2} - 2a_{n+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

③と④を，それぞれ②に代入すると

$$\begin{aligned} & b_{n+1} = -2a_n + 5b_n \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+2} - 2a_{n+1} = -2a_n + 5(a_{n+1} - 2a_n) \\ \therefore\ & a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0 \end{aligned}$$

◀ 3 項間漸化式に帰着された

また，①より

$$a_2 = 4a_1 - 2b_1 = 4 - 2(-1) = 6$$

◀ 3 項間漸化式を解く際に，第 2 項も必要となるのでここで求めておく

である．

ここで，漸化式 $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0$ は

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$

を満たす t，つまり

$$\begin{aligned} & t^2 - 7t + 12 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (t-3)(t-4) = 0 \\ \therefore\ & t = 3,\ 4 \end{aligned}$$

を用いて

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 4(a_{n+1} - 3a_n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 4a_n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

と 2 通りに変形できる．

i) ⑤について

$c_n = a_{n+1} - 3a_n$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は $c_{n+1} = 4c_n$ を満たすので

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 4^{n-1} \\ &= (a_2 - 3a_1)4^{n-1} \\ &= 3 \cdot 4^{n-1} \end{aligned}$$

ここで，$c_n = a_{n+1} - 3a_n$ であるから

$$a_{n+1} - 3a_n = 3 \cdot 4^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤'$$

ii) ⑥について

$d_n = a_{n+1} - 4a_n$ とおくと，数列 $\{d_n\}$ は $d_{n+1} = 4d_n$ を満たすので

$$\begin{aligned} d_n &= d_1 3^{n-1} \\ &= (a_2 - 4a_1)3^{n-1} \\ &= 2 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

ここで，$c_n = a_{n+1} - 4a_n$ であるから

$$a_{n+1} - 4a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥'$$

⑤$'$ − ⑥$'$ より

$$a_n = 3 \cdot 4^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1} \quad \cdots\cdots ⑦$$

また，この式で n のかわりに $n+1$ とおくと

$$a_{n+1} = 3 \cdot 4^n - 2 \cdot 3^n \quad \cdots\cdots ⑧$$

⑦と⑧を③に代入して

$$b_n = 3 \cdot 4^n - 2 \cdot 3^n - 2(3 \cdot 4^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1})$$

$$\Leftrightarrow \ b_n = 12 \cdot 4^{n-1} - 6 \cdot 3^{n-1} - 2(3 \cdot 4^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1})$$

$$\therefore \ b_n = -2 \cdot 3^{n-1} + 6 \cdot 4^{n-1}$$

第 3 章

数学的帰納法

§ 3.1

数学的帰納法の原理

この章では，数学的帰納法という新しい証明手法について学ぶ．実際に数式を扱う前に，まずはドミノ倒しの例からイメージをつかんでほしい．

3.1.1　数学的帰納法の原理

■ドミノ倒し

数学的帰納法を理解するために，ドミノ倒しの例を考える．

ドミノ倒しという遊びがある．ドミノを床に立ち並べ，並べ終えたら最初の 1 枚を倒す．すると，その勢いで後に続くドミノが次々と倒れていき，最終的には全てのドミノを倒すことができる．逆に，ドミノがうまく倒れず途中で止まってしまうこともある．

ドミノ倒しを成功させる要領はなんだろうか．それは

(1) 最初の 1 枚をしっかりと立てる
(2) 2 枚目以降のドミノを，直前の 1 枚が倒れた勢いで倒れるように立てる

ことである．この 2 点さえ確実に守れば，ドミノ倒しの規模をどんどん大きくすることができる．1 個，2 個，3 個，… とドミノの数を増やしていけば，理論的には無限個のドミノ倒し（もちろん現実には不可能だが）も成功するはずである．

これから学ぶ数学的帰納法では，このドミノ倒しと同じ要領で数学の証明をおこなう．すなわち，数学的帰納法は

(1) まず出発点となる命題を証明する
(2) 直前の命題が正しければ次の命題も正しいことを証明する

ことで，全ての場合において正しさを証明しまおう，という手法である．

以下では，数式の例を用いて数学的帰納法を説明していく．

■数学的帰納法の例

次の問題を考えてみよう．

『すべての自然数 n において

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を証明せよ』

本当にこの①が成立するかどうか，試しに $n=1$ を代入してみると

$$（左辺）= \sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1 \cdot 2 = 2$$

$$（右辺）= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2$$

となり成立している．

次に，$n=2$ の場合も

$$（左辺）= \sum_{k=1}^{2} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$$

$$（右辺）= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 8$$

で成立している．

また，$n=3$ の場合も

$$（左辺）= \sum_{k=1}^{3} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 20$$

$$（右辺）= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 20$$

で確かに成立している．

しかし，n が 1，2，3 の場合に成立したからといって，①が全ての自然数で成立するかはまだわからない．なぜなら，$n=4$ 以上の場合の成立についてはまだ確かめていないからである．

かといって，4 以上の n について 1 つずつ調べていったとしても，無限にある自然数を調べ尽くすことはできない．

ここで威力を発揮するのが**数学的帰納法** (mathematical induction) である．

> ある自然数 m の場合に①が成り立つと仮定したとき，その次の自然数 $m+1$ の場合にも①が成り立つ．

ことを証明しよう．

これさえ証明してしまえば，$n=1$ の場合には①が成り立つことがすでに証明されているので，その次の $n=2$ の場合も成り立つ．○は成立が示されたもの．●は成立がまだ示されていないものとして並べると，次のようになる．

	1	2	3	4	5	
（前）	○	●	●	●	●	$\cdots$
	1	2	3	4	5	
（後）	○	○	●	●	●	$\cdots$

また，$n = 2$ の場合が成り立つならば，同様にしてその次の $n = 3$ の場合も成り立つ．

	1	2	3	4	5	
（前）	○	○	●	●	●	$\cdots$
	1	2	3	4	5	
（後）	○	○	○	●	●	$\cdots$

以降，冒頭のドミノ倒しの例のように，次々と①が成り立つことが示される．この論法に終わりはないので，すべての自然数 n に対して①が成り立つと結論付けてよい．

§ 3.2

基本的な数学的帰納法

以降では，数学的帰納法のさまざまなパターンを紹介していく．特にこの章では，基本的な等式と不等式の数学的帰納法について学ぶ．

3.2.1　等式の数学的帰納法

■等式の数学的帰納法

ここでは，数学的帰納法を利用して等式を証明する．

【例題：基本的な数学的帰納法〜その１〜】

すべての自然数 n において

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を証明せよ．

【解答】

1) $n = 1$ のとき

$$（左辺）= \sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1 \cdot 2 = 2$$

$$（右辺）= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2$$

となるので，確かに①は成り立つ．

2) $n = m$ のとき（m はある自然数とする）①が成り立つと仮定する，つまり

$$\sum_{k=1}^{m} k(k+1) = \frac{1}{3}m(m+1)(m+2) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

を仮定する．

このとき，①で $n = m + 1$ とおいた等式

$$\sum_{k=1}^{m+1} k(k+1) = \frac{1}{3}(m+1)(m+2)(m+3) \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つのを以下に示す．

（③の左辺）

$$= \sum_{k=1}^{m+1} k(k+1)$$

$$= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + m(m+1) + (m+1)(m+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} k(k+1) + (m+1)(m+2)$$

◀ 仮定②を使えるような形にするため $\sum_{k=1}^{m} k(k+1)$ をくくり出した

$$= \frac{1}{3}m(m+1)(m+2) + (m+1)(m+2) \quad \because ②$$

$$= (m+1)(m+2)\left(\frac{1}{3}m+1\right)$$

◀ 共通因数 $(m+1)(m+2)$ でくくった

$$= (m+1)(m+2)\frac{m+3}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(m+1)(m+2)(m+3)$$

= ③の右辺

よって，$n = m$ のとき①が成り立つと仮定すれば，$n = m+1$ の場合も①が成り立つことがいえた．

1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数 n について，①は成り立つ． ■

3.2.2　不等式の数学的帰納法

■不等式の数学的帰納法

ここでは，数学的帰納法を利用して不等式を証明する．

【例題：基本的な数学的帰納法〜その２〜】

すべての自然数 n において

$$3^n > n+1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つことを証明せよ．

【解答】

1) $n = 1$ のとき

（左辺）$= 3^1 = 3$

（右辺）$= 1 + 1 = 2$

となるので，確かに①は成り立つ．

2) $n = m$ のとき（m はある自然数とする）①が成り立つと仮定する，つまり

$$3^m > m+1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を仮定する．

このとき，①で $n = m + 1$ とおいた不等式

$$3^{m+1} > m + 2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つのを以下に示す．

$$\begin{aligned}&(③の左辺)\\&= 3^{m+1}\\&= 3 \cdot 3^m\\&> 3 \cdot (m + 1) &\because ②\\&= 3m + 3\\&= m + 2 + (2m + 1)\\&> m + 2 &\because 2m + 1 > 0\\&= (③の右辺)\end{aligned}$$

◀ 仮定②を使えるような形にするため 3^m をくくりだした

◀ 正の数 ($2m + 1$) をなくせば，全体として小さくなる

よって，$n = m$ のとき①が成り立つと仮定すれば，$n = m + 1$ の場合も①が成り立つことがいえた．

1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数 n について，①は成り立つ．■

3.2.3　一般の命題の数学的帰納法

■一般の命題の数学的帰納法

一般の命題の場合でも，その命題を等式で表してやれば，等式の数学的帰納法 (p.96) と同様になる．

【例題：基本的な数学的帰納法〜その３〜】

2 以上の自然数 n において

p の整式 $p^n + (1 - p)n - 1$ は $(1 - p)^2$ で割りきれる　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ①

ことを証明せよ．

【解答】

1) $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned}&p^2 + (1 - p) \cdot 2 - 1\\&= p^2 - 2p + 1\\&= (1 - p)^2\end{aligned}$$

となるので，確かに①は成り立つ．

2) $n = m$ のとき（m はある自然数とする）①が成り立つと仮定する，つまり

$$p^m + (1 - p)m - 1 = (1 - p)^2 Q(p) \qquad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

を満たす p の整式 $Q(p)$ が存在すると仮定する．

このとき，①で $n = m + 1$ とおいた場合の成立，つまり

◀ 一般に，「整式 $f(x)$ が $(1 - p)^2$ で割りきれる」とは
$f(x) = (1 - p)^2 Q(x)$
となるような整式 $Q(x)$ が存在することである

$$p^{m+1} + (1 - p)(m + 1) - 1 = (1 - p)^2 R(p) \quad \cdots\cdots \text{③}$$

を満たす p の整式 $R(p)$ が存在することを以下に示す．

$$\begin{aligned}
&(\text{③の左辺})\\
&= p \cdot p^m + m + 1 - pm - p - 1\\
&= p \cdot p^m + m - pm - p\\
&= p\{\underbrace{p^m + (1 - p)m - 1\}}_{\text{②の左辺を強引につくる}} \underbrace{-p\{(1 - p)m - 1\}}_{\text{ずれた分のつじつま合わせ}} + m - pm - p\\
&= p(1 - p)^2 Q(p) - mp(1 - p) + \cancel{p} + m - pm - \cancel{p} \qquad \because \text{②}\\
&= p(1 - p)^2 Q(p) + m(p^2 - 2p + 1)\\
&= p(1 - p)^2 Q(p) + m(1 - p)^2\\
&= (1 - p)^2 \left(pQ(p) + m\right)
\end{aligned}$$

◀ 仮定②が使えるような形をうまくつくる

◀ 共通因数 $(1 - p)^2$ でくくった

$Q(p)$ は整式だから $pQ(p) + m$ も整式となり，これを $R(p)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&= (1 - p)^2 R(p)\\
&= (\text{③の右辺})
\end{aligned}$$

よって，$n = m$ のとき①が成り立つと仮定すれば，$n = m + 1$ の場合も①が成り立つことがいえた．

1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数 n について，①は成り立つ．　■

§ 3.3

いろいろな数学的帰納法

以降では，より複雑な数学的帰納法の利用について学ぶ.

3.3.1　答えを推定してから数学的帰納法で証明する

■答えを推定してから数学的帰納法で証明する

「証明せよ」という問題でなくても，答えを予想できれば，それを証明することによって解答になる.

【例題：いろいろな数学的帰納法～その１～】

漸化式

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n}\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で定められる数列の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答】

漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1+a_n}$ に $n = 1$ を代入すると

$$a_2 = \frac{2a_1}{1+a_1} = \frac{2\cdot 2}{1+2} = \frac{4}{3}$$

また，$n = 2$ を代入すると

$$a_3 = \frac{2a_2}{1+a_2} = \frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}} = \frac{8}{7}$$

また，$n = 3$ を代入すると

$$a_4 = \frac{2a_3}{1+a_3} = \frac{2\cdot\frac{8}{7}}{1+\frac{8}{7}} = \frac{16}{15}$$

となるので

$$a_n = \frac{2^n}{2^n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と推定できる.

以下，この推定が正しいことを数学的帰納法を用いて証明する.

1) $n=1$ のとき

$$a_1 = \frac{2^1}{2^1-1} = 2$$

となるので，確かに②は成り立つ.

2) $n=m$ のとき (m はある自然数とする)②が成り立つと仮定する，つまり

$$a_m = \frac{2^m}{2^m-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つと仮定する.

このとき，②で $n=m+1$ とおいた場合の成立，つまり

$$a_{m+1} = \frac{2^{m+1}}{2^{m+1}-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

か成り立つことを以下示す.

$$\begin{aligned} &(④の左辺) \\ &= a_{m+1} \\ &= \frac{2a_m}{1+a_m} && \because ① \\ &= \frac{2\cdot\dfrac{2^m}{2^m-1}}{1+\dfrac{2^m}{2^m-1}} && \because ③ \\ &= \frac{2\cdot 2^m}{2^m-1+2^m} \\ &= \frac{2^{m+1}}{2^{m+1}-1} \\ &= (④の右辺) \end{aligned}$$

◀ ①の漸化式はすべての自然数で成り立つ

よって，$n=m$ のとき③が成り立つと仮定すれば，$n=m+1$ の場合も③が成り立つことがいえた.

1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数 n について，②は成り立つ. ■

3.3.2　$n = m,\ m + 1$ を仮定して $n = m + 2$ を示す

■$n = m,\ m + 1$ を仮定して $n = m + 2$ を示す

$n = m$ の場合を仮定しただけでは，$n = m + 1$ の場合を証明できないときもある．このようなときは，さらに $n = m$ に加えて $n = m + 1$ の場合も仮定した上で，$n = m + 2$ の場合を証明してやるとよい．

【例題：いろいろな数学的帰納法～その２～】

$x + \dfrac{1}{x} = t$ とするとき，すべての自然数 n において

式 $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ は t の n 次多項式で表される　……………………　①

ことを証明せよ．

【解答】

1) $n = 1$ のとき

$$x^1 + \frac{1}{x^1} = t$$

となり，確かに①は成り立つ．

$n = 2$ のとき

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$$

となり，こちらも確かに①は成り立つ．

◀ $n = 2$ の場合の成立を示すのは, 2) の証明で必要となるからである

2) $n = m,\ m + 1$ のとき (m はある自然数とする)①が成り立つと仮定する，つまり

$$x^m + \frac{1}{x^m} = P_m(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}} = P_{m+1}(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つと仮定する．ただし，式 $P_i(t)$ は t の i 次多項式を意味するものとする．

このとき，①で $n = m + 2$ とおいた場合の成立，つまり

$$x^{m+2} + \frac{1}{x^{m+2}} = P_{m+2}(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

か成り立つことを以下示す．

(④の左辺)

$$= x^{m+2} + \frac{1}{x^{m+2}}$$

$$= \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)^{m+1}}_{\text{仮定③}}\left(x + \frac{1}{x}\right) - \underbrace{\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)}_{\text{仮定②}}$$

$$= t \cdot P_{m+1}(t) - P_m(t) \qquad \because ②,\ ③$$

◀ 仮定③を強引にくくり出し，つじつまあわせの部分で仮定②が欲しくなる

$t \cdot P_{m+1}(t) - P_m(t)$ は t の $m+2$ 次多項式となるから，これを $P_{m+2}(t)$ とおくと

$$= (④の右辺)$$

◀ $t \cdot P_{m+1}(t)$ は $m+2$ 次多項式，$P_m(t)$ は m 次多項式であり，その差 $t \cdot P_{m+1}(t) - P_m(t)$ は，必ず $m+2$ 次多項式となる
たとえば，2 次多項式 $2t^2 - 3t + 4$ から 1 次多項式 $3t + 2$ を引くと $2t^2 - 3t + 4 - (3t + 2) = 2t^2 + 6t + 2$ となり，2 次多項式が得られる

よって，$n = m$，$m + 1$ のときⓘが成り立つと仮定すれば，$n = m+2$ の場合も①が成り立つことがいえた．

1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数 n について，①は成り立つ． ■

実際に問題を解く場面は，いきなり上記のようにきれいに書き始められるようなことはないと言ってよい．実際には $n = 1$ 成立を確認して，$n = m$ 成立を仮定し $n = m + 1$ 成立を示そうとするのだが，$n = m + 1$ 成立を示そうとしたときに，前提条件が足りないことに気が付く．そこで $n = m$ に加えて $n = m + 1$ の場合も仮定した上で，$n = m + 2$ の場合を証明するという発想に行き着くのである．

m　$m+1$　$m+2$
○　○　●

3.3.3　$n = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$ を仮定して $n = m + 1$ を示す

■$n = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$ を仮定して $n = m + 1$ を示す

【例題：いろいろな数学的帰納法〜その３〜】

次の式を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} {a_k}^3,\ \ a_n > 0\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

この問題は「証明せよ」ではないので，まず実験から答えを予想するところからはじめる．予想が立てば，それを証明してやるのだが，$n = m + 1$ の場合の成立をいうのに，$n = 1,\ 2,\ \cdots,\ m - 1,\ m$ の場合の成立を仮定する必要がある．

【解答】

①に $n=1$ を代入すると

$$\left(\sum_{k=1}^{1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{1} {a_k}^3$$

$$\Leftrightarrow\ {a_1}^2 = {a_1}^3$$

$$\therefore\ a_1 = 1$$

また，$n=2$ を代入すると

$$\left(\sum_{k=1}^{2} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{2} {a_k}^3$$

$$\Leftrightarrow\ (a_1+a_2)^2 = {a_1}^3 + {a_2}^3$$

$$\Leftrightarrow\ (1+a_2)^2 = 1^3 + {a_2}^3$$

$$\Leftrightarrow\ {a_2}^3 - {a_2}^2 - 2a_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ a_2(a_2+1)(a_2-2) = 0$$

$$\therefore\ a_2 = 2$$

また，$n=3$ を代入すると

$$\left(\sum_{k=1}^{3} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{3} {a_k}^3$$

$$\Leftrightarrow\ (a_1+a_2+a_3)^2 = {a_1}^3 + {a_2}^3 + {a_3}^3$$

$$\Leftrightarrow\ (1+2+a_3)^2 = 1^3 + 2^3 + {a_3}^3$$

$$\Leftrightarrow\ {a_3}^3 - {a_3}^2 - 6a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ a_3(a_3+2)(a_3-3) = 0$$

$$\therefore\ a_3 = 3$$

となるので

$$a_n = n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と推定できる.

以下，この推定が正しいことを数学的帰納法を用いて証明する.

1) $n=1$ のとき.

$$a_1 = 1$$

となるので，確かに②は成り立つ.

2) $n \leqq m$(m はある自然数とする) を満たすすべての n

で，②が成り立つと仮定する，つまり

$$a_l = l \ (1 \leqq l \leqq m) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つと仮定する．

このとき，②で $n = m + 1$ とおいた場合の成立，つまり

$$a_{m+1} = m + 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

が成り立つことを以下示す．

①より

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^{m+1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{m+1} {a_k}^3 \\
\Leftrightarrow\ &\left(\sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{m} {a_k}^3 + {a_{m+1}}^3 \\
\Leftrightarrow\ &\left(\sum_{k=1}^{m} k + a_{m+1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{m} k^3 + {a_{m+1}}^3 \qquad \because ③ \\
\Leftrightarrow\ &\left\{\frac{m(m+1)}{2} + a_{m+1}\right\}^2 = \frac{m^2(m+1)^2}{4} + {a_{m+1}}^3 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{m^2(m+1)^2}{4} + m(m+1)a_{m+1} + {a_{m+1}}^2 \\
&\qquad = \frac{m^2(m+1)^2}{4} + a_{m+1}^3 \\
\Leftrightarrow\ &{a_{m+1}}^3 - {a_{m+1}}^2 - m(m+1)a_{m+1} = 0 \\
\Leftrightarrow\ &a_{m+1}(a_{m+1} + m)\{a_{m+1} - (m+1))\} = 0 \\
\therefore\ &a_{m+1} = m + 1 \qquad (④\text{がいえた})
\end{aligned}$$

◀ 仮定③を組み込むための準備

◀ l が $1 \leqq l \leqq m$ のとき，$a_l = l$ となることを③で仮定しているので $\sum_{k=1}^{m} a_k$ は

$\sum_{k=1}^{m} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 1 + 2 + \cdots + m = \sum_{k=1}^{m} k$

となる

よって，$n = m$ のとき②が成り立つと仮定すれば，$n = m + 1$ の場合も②が成り立つことがいえた．

1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数 n について，②は成り立つ．　■

第 4 章

ベクトルの定義と基本演算

§ 4.1

ベクトルの定義

ベクトルとはどのようなものであるか，ここでは図を交えながら，その基本的な考え方を知っていこう．

4.1.1　ベクトルとは何か

■「向き」を含む問題

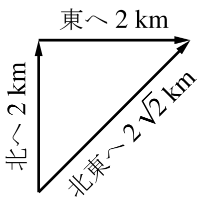
まず，次のような問題を考えてみよう．

(1) りんごを 2 個購入して，さらに 2 個購入した時，最初から数えて何個購入しているか？

(2) 北に 2 km 移動して，さらに東に 2 km 移動した時，最初の位置からどの場所へ移動しているか？

(1) は $2 + 2 = 4$ より「4 個」である．

(2) は移動距離としては $2 + 2 = 4$ より 4 km だが，最初の位置から 4 km 離れた距離にいるわけではない．下図のように，(2) の正確な答えとしては「北東に $2\sqrt{2}$ km 移動した」となる．



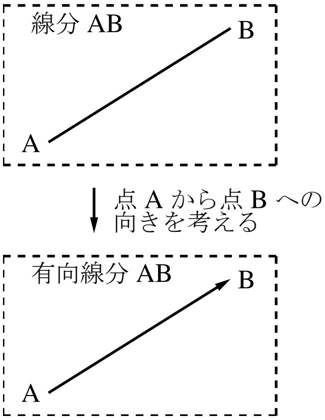
これまで学習した分野（関数や数列など）では，(1) のように「大きさ」のみを取り扱ってきた．

これに対して，本章以降では (2) のように「大きさ」に加えて「向き」という概念を含んだ量を取り扱っていく．なお，このように「向き」と「大きさ」で定まる量のことを，一般に**ベクトル** (vector) という．それに対して，大きさだけをもつものを**スカラー** (scalar) という．

■有向線分

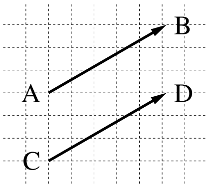
有向線分というものをもちいて,「向き」を図で表してみよう.

右図の線分 AB において, 点 A から点 B への「向き」を考えたものを**有向線分** (oriented segment) AB といい, 点 A から点 B への矢印として表す. このとき, 点 A をその**始点** (initial point) , 点 B をその**終点** (terminal point) , 線分 AB の長さをその**大きさ** (length) という.

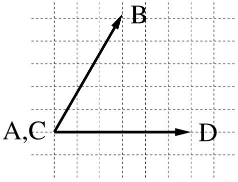


各図における有向線分 AB と有向線分 CD の違いを確認しよう.

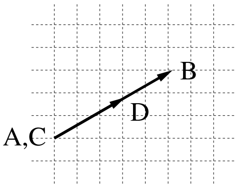
1) 始点の異なる有向線分



2) 向きの異なる有向線分



3) 大きさの異なる有向線分



一般に, 有向線分は次のいずれかの条件を与えれば定まるといえる.

a) 始点, 終点
b) 位置 (始点 or 終点), 向き, 大きさ

■ベクトルの定義

有向線分は「位置」が固定されているものであった. そして, この「位置」条件の存在のために, 図 1) の有向線分 AB と有向線分 CD は互いに異なる有向線分となっていた.

これに対して, 有向線分であるための条件 b) から「位置」条件を無視したものは「向き」と「大きさ」だけとなるのでベクトルを表すと考えることができる.

この有向線分 AB の表すベクトルを, 記号で

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

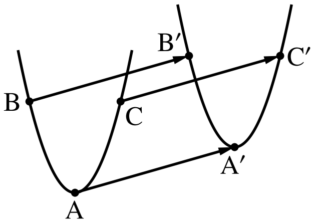
と書く[1].

このように有向線分から「位置」条件を無視し, ベクトルとみなすことでどのようなメリットがあるかを説明しよう.

右図のような 2 次関数の平行移動を考える.

---

[1] $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は「ベクトル・エー・ビー」と発音する.



このとき，各有向線分 AA′，BB′，CC′ は全て異なる有向線分となるが，各ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CC'}}$ は全て同じベクトルを表している．

このように，有向線分は位置条件が存在するため，「平行移動」という事象に対して統一的に考えられないが，ベクトルは位置条件を無視するため，「平行移動」という事象に対して統一的に考えることができるようになる．

■ベクトルの相等の定義

上記の議論によって，有向線分を利用してベクトルを可視化することができた．

さて本章冒頭で述べたように，ベクトルは「大きさ」に加えて「向き」という新しい概念を含んだ量であった．そのため，等号「=」や演算記号「+」「−」なども新たに定義する必要がある．

「北 2 km」+「東 2 km」=「北東 $2\sqrt{2}$ km」となるように定義するのが自然であろう．

ここでは，まずは等号「=」について定義しよう．

さきほどの p.108 の図 1）に登場したベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は向きと大きさが等しいので同じベクトルであった．そこで

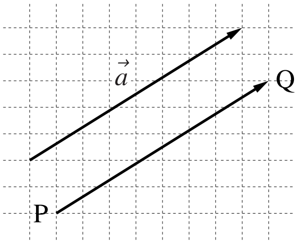
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

と書くことにし，このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は等しいということにする．

また，ベクトルは始点と終点を明記しないで，単に $\vec{a}$，$\vec{b}$ と書くこともある．たとえば，右図のようなとき $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\vec{a}$ は向きと大きさが等しいので

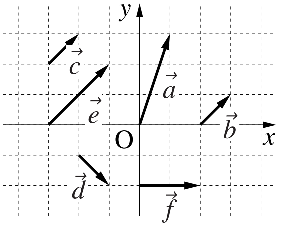
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \vec{a}$$

となる．



【例題：ベクトルの相等】

右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{f}$ について，互いに等しいベクトルをいえ．



【解答】

大きさと向きの等しいものを見つければよいので，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ が等しいベクトルである．

■ベクトルの大きさの表し方

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ や $\vec{a}$ の大きさを，それぞれ $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$，$|\vec{a}|$ と表す．ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ は，(有向)線分 AB の長さに等しい．特に，大きさが 1 であるベクトルを**単位ベクトル** (unit vector) という．

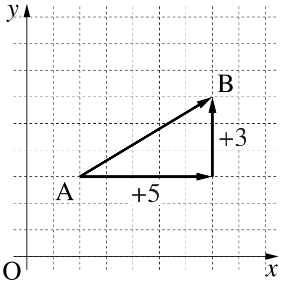
4.1.2　平面ベクトルの成分表示

ベクトルは向きと大きさで定まる量と定めたが，今のままでは向きを矢印(有向線分)で表すしか方法がないため，ベクトルを表現する手段として図を描くしか方法がない．そこで，ここでは図を描かなくてもベクトルを表現できる方法を考えよう．

■平面ベクトルを成分で表す

座標平面上にあるベクトルに対して，そのベクトルを成分を用いて表してみよう．

右図のように，xy 平面上に 2 点 A(2, 3)，B(7, 6) をとり，有向線分 AB を考える．



このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を

x の増分 : $8-3=5$

y の増分 : $4-1=3$

を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ と表すことにする．

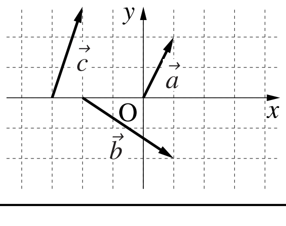
一般には，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ において，有向線分 PQ における x の増分 x_2-x_1，y の増分 y_2-y_1 をもちいて

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$$

と表す．ベクトルのこのような表し方を成分表示といい，x_2-x_1 の値を **x 成分** (x-component)，y_2-y_1 の値を **y 成分** (y-component) という．

【例題：ベクトルの成分表示】

右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を成分で表せ．



【解答】

まず，$\vec{a}$ の始点の座標は (0, 0)，終点の座標は (1, 2) である．したがって

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

となる．同様にして，$\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$ となる．

■成分表示された平面ベクトルの相等

一般に，2 つの $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ の相等に関して

$$\vec{a} = \vec{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \end{cases}$$

が成り立つ．

■成分表示された平面ベクトルの大きさ

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさ $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ は，線分 AB の長さであるから，三平方の定理より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$$

となる．

一般に，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ の大きさ $\left|\vec{a}\right|$ は

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$$

で求まる．

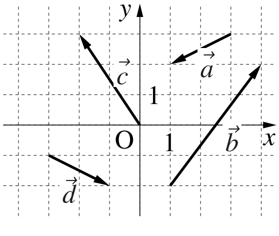
特に，2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ については

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

となる．

【例題：有向線分のあらわすベクトルの大きさ】

右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ について，それぞれの大きさを求めよ．



【解答】

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(1-3)^2+(2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(4-1)^2+\{2-(-2)\}^2} = \sqrt{9+16} = \mathbf{5}$$

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \boldsymbol{\sqrt{13}}$$

$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{\{-1-(-3)\}^2+\{-2-(-1)\}^2} = \sqrt{4+1} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$$

§ 4.2

ベクトルの演算

前セクションで述べたように，ベクトルは大きさに加えて向きという新しい概念を含んだ量であったので，ベクトルの演算も新たに定義する必要がある．ここでは，ベクトルの「和」「差」「実数倍」についてみていこう．

4.2.1　ベクトルの加法

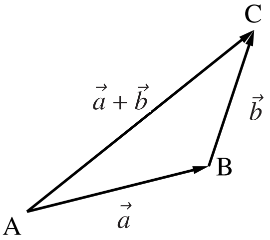
■ベクトルの加法の定義

2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，まず点 A を定めて

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

となる点 B，C を取るとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和といい，$\vec{a}+\vec{b}$ と書く．すなわち，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



■ベクトルの加法に関する計算法則

一般に，ベクトルの加法について，次のことが成り立つ．

ベクトルの加法に関する計算法則

1) 交換法則　$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$
2) 分配法則　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

【証明】

1) 2 つのベクトル，$\vec{a}$，$\vec{b}$ について

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

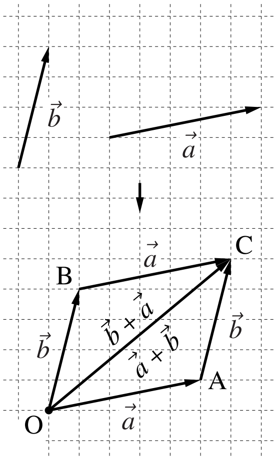
となるように点 O，A，B，C をとる．このとき，

$$\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\vec{b}+\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

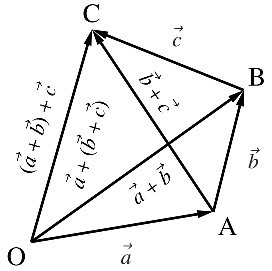
よって

$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$$



以上より，$\vec{a}+\vec{b}$ $(=\vec{b}+\vec{a})$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $(=\vec{a})$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(=\vec{b})$ によってつくられる平行四辺形 OACB の対角線のベクトルとして表すことができる[2]．

2) 3つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ について $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるように点 O，A，B，C をとる．



このとき，

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}})+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

よって

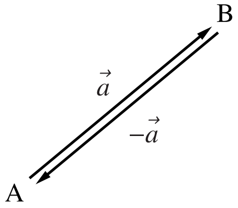
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

以上より，ベクトルの和に関しては，その順序を区別しなくてよいので括弧を省略して，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と書く．

■逆ベクトルとゼロベクトル

ある $\vec{a}$ に対し，大きさが等しく向きが反対であるベクトルを，$\vec{a}$ の**逆ベクトル** (inverse vector) といい，$-\vec{a}$ で表す．

いま，右図のように $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とすると，$-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

である．

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と，その逆ベクトル $-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ の和は

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}$$

となる．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ を，始点と終点が一致した特別な有向線分の表すベクトルと考えて，これを**ゼロベクトル** (zero vector) といい，記号 $\vec{0}$ で表す[3]．つまり

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

である．

---

[2] この平行四辺形は，「$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で張られる平行四辺形」とも表現される．

[3] $\vec{0}$ は実数の 0（ゼロ）ではないことに気をつけよう．必ず矢印をつけて区別すること．

ゼロベクトルの大きさは 0 とし，その向きは考えないものとする．ゼロベクトルには，数の 0 と同じように次のような性質がある．

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$$

■成分表示された平面ベクトルの加法

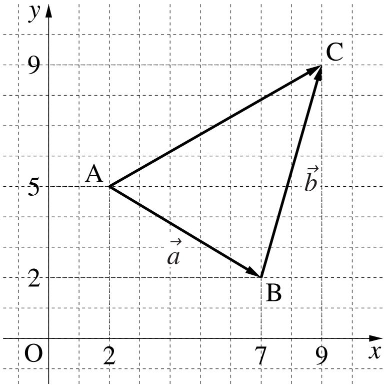
右図のような 2 つのベクトルを考える．

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$$

いま，$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は右図より $\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$ となる．つまり

$$\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$$

が成立する．



一般に，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ と $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$ の和 $\vec{a}+\vec{b}$ は

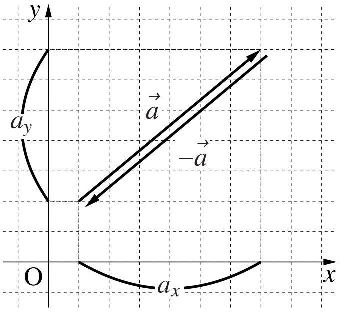
$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x+b_x\\a_y+b_y\end{pmatrix}$$

となる．

また，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ の逆ベクトルの成分表示は，右図より $-\vec{a}=\begin{pmatrix}-a_x\\-a_y\end{pmatrix}$ となり，ゼロベクトルの成分表示は

$$\vec{0}=\vec{a}+(-\vec{a})=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a_x\\-a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

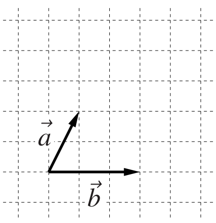
となる．



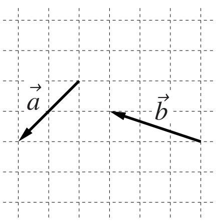
【例題：ベクトルの加法】

$\vec{a}$，$\vec{b}$ が次のように表されているとき，$\vec{a}+\vec{b}$ を図示し，成分表示せよ．ただし，1 マスの 1 辺の長さは 1 とする．

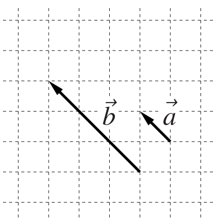
(1)



(2)

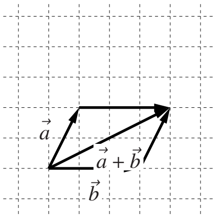


(3)

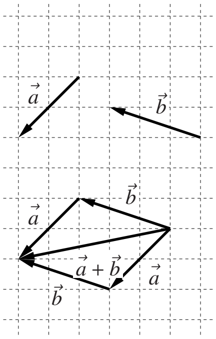


【解答】

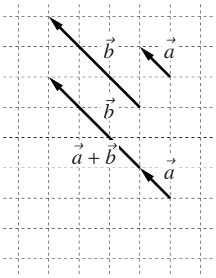
(1) 右図より，$\vec{a}+\vec{b}$ について，x の増分は 4，y の増分は 2 であるので，$\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}}$



(2) 右図より，$\vec{a}+\vec{b}$ について，x の増分は -5，y の増分は -1 であるので，$\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}}$



(3) 右図より，$\vec{a}+\vec{b}$ について，x の増分は -4，y の増分は 4 であるので，$\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}}$



4.2.2　ベクトルの減法

■ベクトルの減法の定義

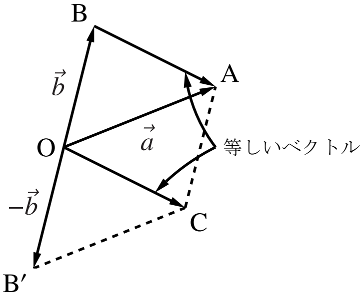
2 つのベクトル，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ に対して，$\vec{a}$ に $\vec{b}$ の逆ベクトルを加えたもの $\vec{a}+(-\vec{b})$ を $\vec{a}-\vec{b}$ と書き，これを，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ を引いた差という．つまり

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

いま，右図のように $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと，$\vec{a}-\vec{b}$ は $\vec{a}+(-\vec{b})$ であるから

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$



また，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

が成り立つ．

■成分表示された平面ベクトルの減法

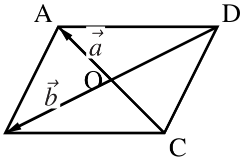
2 つのベクトルを，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\ b_y\end{pmatrix}$ とおくと，$-\vec{b}=\begin{pmatrix}-b_x\\ -b_y\end{pmatrix}$ となるから

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_x\\ b_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x-b_x\\ a_y-b_y\end{pmatrix}$$

となる．

【例題：ベクトルの減法】

平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\ -1\end{pmatrix}$ とする．次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表し，また，成分表示せよ．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　(5) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

【解答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DO}}=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-(-\vec{b})=\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\ \mathbf{-1}\end{pmatrix}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}-(-\vec{b})=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-3}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$

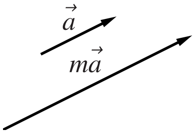
(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\ -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\ \mathbf{-2}\end{pmatrix}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\vec{a}=-\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{-1}\end{pmatrix}$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\vec{a}-\vec{b}=-\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$

4.2.3　ベクトルの実数倍

■ベクトルの実数倍の定義



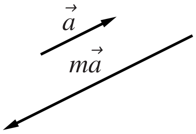
$\vec{0}$ でない $\vec{a}$ と実数 m に対し，$\vec{a}$ の m 倍 $m\vec{a}$ を次のように定める．

1) $m>0$ のとき

$\vec{a}$ と同じ向きで，大きさが $|\vec{a}|$ の $\underbrace{\ m\ }_{\text{正}}$ 倍のベクトル

2) $m<0$ のとき

$\vec{a}$ と反対の向きで，大きさが $\left|\vec{a}\right|$ の $\underbrace{|m|}_{\text{正}}$ 倍のベクトル



3) $m = 0$ のとき

$0\vec{a} = \vec{0}$ と定める．

また，$\vec{a} = \vec{0}$ のときは，任意の実数 m に対して $m\vec{0} = \vec{0}$ と定める．

特に，$m = 1$ のときは 1 を省略して書く．つまり $1\vec{a} = \vec{a}$ である．m が分数 $m = \dfrac{l}{k}$ のとき，$\dfrac{l}{k}\vec{a}$ を $\dfrac{l\vec{a}}{k}$ と書くこともある．

■ベクトルの実数倍に関する計算法則

ベクトルの実数倍に関する計算法則

1) ベクトルの実数倍の結合法則

$m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$

2) ベクトルの実数倍に対する分配法則

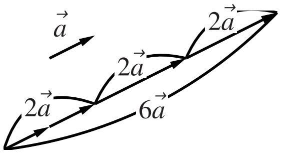
$(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

3) 実数倍のベクトルに関する分配法則

$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

【証明】

1) たとえば右図のように，$3(2\vec{a})$ は $2\vec{a}$ の向きを変えずに大きさを 3 倍したベクトルであるが，これは $\vec{a}$ を向きを変えずに 6 倍したベクトルと等しい．つまり



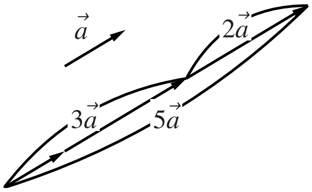
$$3(2\vec{a}) = 6\vec{a}$$

一般に，ベクトルの実数倍に関して

$$m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$$

が成り立つ．これらは同じベクトルを表すため区別する必要がないので，括弧を省略して単に $mn\vec{a}$ と書くこともある．

2) たとえば右図のように，$(3+2)\vec{a}$ つまり $5\vec{a}$ は，$3\vec{a}$ と $2\vec{a}$ の和つまり $3\vec{a} + 2\vec{a}$ と等しい．つまり



$$(3 + 2)\vec{a} = 3\vec{a} + 2\vec{a}$$

一般に，ベクトルの実数倍に関して

$$(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$$

が成り立つ．

3) たとえば右下図のように，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で張られる平行四辺形 OACB と，$2.5\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $2.5\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OE}}$ で張られる平行四辺形 ODFE を考える．
このとき，平行四辺形 OACB と平行四辺形 ODFE は相似な図形となり，その相似比は 1 : 2.5 となるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = 2.5\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2.5(\vec{a} + \vec{b})$$

となる．また，ベクトルの和から

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}} = 2.5\vec{a} + 2.5\vec{b}$$

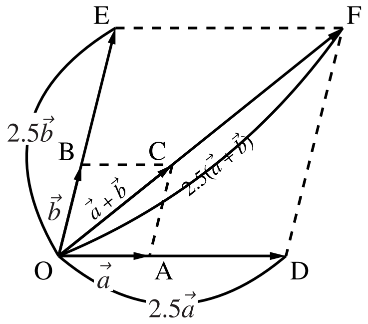
でもあるから

$$2.5(\vec{a} + \vec{b}) = 2.5\vec{a} + 2.5\vec{b}$$

が成り立つ．
一般に，ベクトルの実数倍に関して

$$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$$

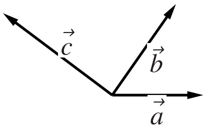
が成り立つ．



【例題：ベクトルの和，差，実数倍】

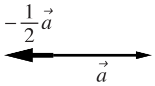
右の図のようにベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ をおくとき，次のベクトルを作図せよ．

(1) $-\dfrac{1}{2}\vec{a}$　　(2) $2\vec{a} + \vec{c}$
(3) $2\vec{b} - 3\vec{c}$　　(4) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

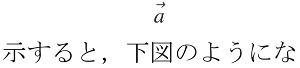


【解答】

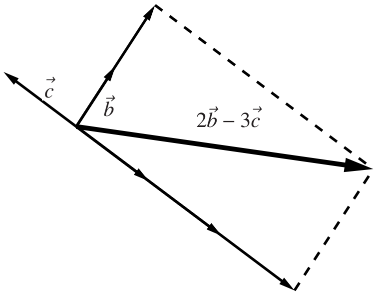
(1) 図示すると下図のようになる．



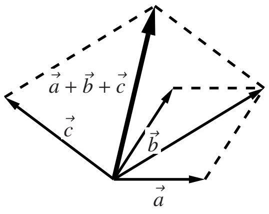
(2) 図示すると下図のようになる．



(3) 図示すると，下図のようになる．



(4) 図示すると下図のようになる．



■単位ベクトル

$\left|\vec{a}\right| \neq 0$ である $\vec{a}$ に対して，同じ向きの単位ベクトルは，$\vec{a}$ を自分自身の大きさで割った $\dfrac{1}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}$ となる．

【例題：単位ベクトル】

(1) $\left|\vec{a}\right| = 5$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ．

(2) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ のとき，$\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルを成分表示せよ．

【解答】

(1) $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\boldsymbol{\dfrac{1}{5}\vec{a}}$ である．

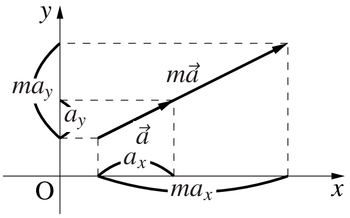
(2) $\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\dfrac{3}{5}} \\ \boldsymbol{-\dfrac{4}{5}} \end{pmatrix}$$

■成分表示された平面ベクトルの実数倍

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ とおくとき，右図より



$$m\vec{a} = m\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_x \\ ma_y \end{pmatrix}$$

となる．

また，$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$ だから，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ と同じ向きの単位ベクトルの成分表示は，

$\dfrac{1}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ となる．[*4]

【例題：ベクトルの実数倍】

(1) $2(\vec{a} + 2\vec{b}) - (4\vec{a} + \vec{b})$ を計算せよ

(2) $(4\vec{a} + 2\vec{b}) - 2(2\vec{a} + \vec{b})$ を計算せよ

【解答】

(1)
$$\begin{aligned} 2(\vec{a} + 2\vec{b}) - (4\vec{a} + \vec{b}) &= 2\vec{a} + 4\vec{b} - 4\vec{a} - \vec{b} \\ &= \boldsymbol{-2\vec{a} + 3\vec{b}} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} (4\vec{a} + 2\vec{b}) - 2(2\vec{a} + \vec{b}) &= 4\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{a} - 2\vec{b} \\ &= \boldsymbol{\vec{0}} \end{aligned}$$

■ベクトルの合成と分解

ベクトルの加法と減法で次の式を学習した．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

このように 2 つ以上のベクトルを 1 つのベクトルで表現することをベクトルの合成という．

またこれらの式を逆にみて

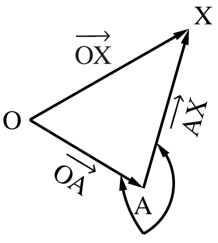
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

1 つのベクトルを 2 つ以上のベクトルで表現することをベクトルの分解という．

[*4] 反対向きの単位ベクトルの成分表示は $-\dfrac{1}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ となる．

①では経由点として点 B をとっているが，ベクトルの加法の定義を考えると，点 B でなくても任意の点でかまわないことがわかる．つまり



寄り道できる

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A\square} + \overrightarrow{\square C}$$

として，□には好きな点を経由点としてとってよい．

同様にして，②では始点として点 O をとっているが，点 O でなくても任意の点でかまわないことがわかる．

つまり

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\square A} - \overrightarrow{\square B}$$

として，□には好きな点を始点としてとってよい．

ベクトルの合成と分解

1) 合成　$\overrightarrow{A\square} + \overrightarrow{\square B} = \overrightarrow{AB}$
　$\overrightarrow{\square B} - \overrightarrow{\square A} = \overrightarrow{AB}$
2) 分解　$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\square} + \overrightarrow{\square B}$
　$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\square B} - \overrightarrow{\square A}$

合成公式の第 1 式と分解公式の第 2 式はよく使うので覚えておこう．

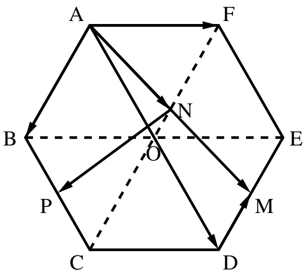
【例題：ベクトルの加法】

正六角形 ABCDEF において，辺 DE の中点を M とし，線分 AM の中点を N，辺 BC の中点を P とする．このとき，$\overrightarrow{AM}$ および $\overrightarrow{NP}$ を，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}$ を用いて表せ．

この正六角形の中心を O とする．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\\ &= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}\\ &= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\ &= \left(2 - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF} = \boldsymbol{\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AN} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}\right)\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}\right)\\ &= \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2} - 1\right)\overrightarrow{AF}\end{aligned}$$



$$= \mathbf{\frac{3}{4}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \mathbf{\frac{1}{2}}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

■ベクトルの平行条件

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが同じか，または反対であるとき[*5]，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**平行**であるといい，$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b}$ と表す．

このとき，$\vec{a} = k\vec{b}$ となる実数 k が存在する．逆に，$k \doteqdot 0$ のとき，$\vec{a} = k\vec{b}$ ならば $\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b}$ といえる．つまり

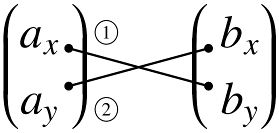
$$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b} \iff \vec{a} = k\vec{b} \text{となる } k \in \mathbb{R} \text{ が存在する}$$

である．

また，成分表示された 2 つのベクトル，$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ と $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$ が平行であるとき

$$\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}kb_x\\kb_y\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}a_x = kb_x\\ a_y = kb_y\end{cases} \iff \begin{cases}k = \dfrac{a_x}{b_x}\\ k = \dfrac{a_y}{b_y}\end{cases}$$



より $(k =)\ \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y}$，つまり

$$a_x b_y = a_y b_x$$

が成り立つ．この式は右上図のように，「① の積 = ② の積」と覚えておくとよい．

ベクトルの平行条件

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$ について

$$\begin{aligned}\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b} &\iff \vec{a} = k\vec{b} \text{となる } k \in \mathbb{R} \text{ が存在する}\\ &\iff a_x b_y = a_y b_x\end{aligned}$$

【例題：ベクトルの平行条件】

$\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\x\end{pmatrix}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行であるように x の値を定めよ．

【解答】

[*5] このとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の「方向が等しい」ともいう．

ベクトルの平行条件 $a_xb_y = a_yb_x$ を考えて

$(-2) \cdot x = 3 \cdot 4 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = -6}$

4.2.4　ベクトルの演算法則のまとめ

以上，ベクトルの加法 (p.113)，ベクトルの減法 (p.116)，ベクトルの実数倍 (p.117) に関して，次の計算法則が成り立つことをみてきた[6].

ベクトルの和・差・実数倍に関する計算法則

1) ベクトルの和の交換法則
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2) ベクトルの和の結合法則
$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

3) ゼロベクトル
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4) 逆ベクトル
$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

5) ベクトルの実数倍の結合法則
$m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$

6) ベクトルの実数倍に対する分配法則
$(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

7) 実数倍のベクトルに関する分配法則
$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

8) 実数倍の単位元
$1\vec{a} = \vec{a}$

---

[6] この 8 つはそのまま**ベクトル空間** (vector space) の公理となる.

第 5 章

平面ベクトルと平面図形

§ 5.1

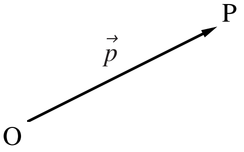
位置ベクトル

ここまでベクトルの定義を行い，ベクトルにおける演算を定義してきた．第 5 章では，ベクトルと図形の関わりを勉強していく．本セクションではまず，図形とベクトルを考えるときの基本となる位置ベクトルについて学習しよう．

5.1.1　位置ベクトルの定義

■位置ベクトルの定義

平面上で，基準とする点 O をあらかじめ定めておくと，任意の点 P の位置は

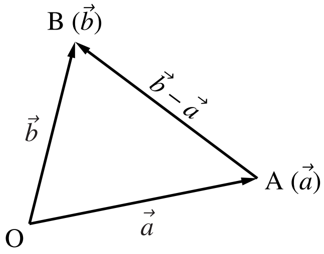


$$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

という $\vec{p}$ によって表すことができる．

この $\vec{p}$ を，点 O に関する点 P への**位置ベクトル** (position vector) という．また，位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P を，P $(\vec{p})$ と表す．

点 O に関して，2 点 A，B がそれぞれ，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ であるとき



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

であるから[1]，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$$

と表される．

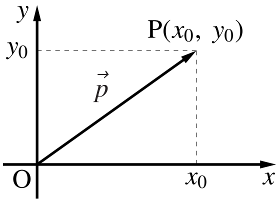
---

[1] ベクトルの合成と分解 (p.121) 参照．

つまり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は「終点 B の位置ベクトルから，始点 A の位置ベクトルを引いた差」に等しい．

5.1.2　位置ベクトルの成分と座標の関係

■位置ベクトルの成分と座標の関係



座標平面内で原点 O を基準ととると，平面上の任意の点 P(x_0, y_0) への位置ベクトル $\vec{p}$ は，$\vec{p}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ となる．

また，逆に原点 O に関する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ が $\vec{p}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ であるとき，点 P の座標は (x_0, y_0) となる．

つまり

「点 P の座標が (x_0, y_0) である」

$\Longleftrightarrow$「原点 O に関する点 P への位置ベクトルは $\vec{p}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ である」

となる．

【例題：位置ベクトルの成分と座標の関係】

$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ とする．

座標平面上の点 A(3, 1) から $3\vec{a}+2\vec{b}$ だけ移動した点 P の座標を求めよ．

【解答】

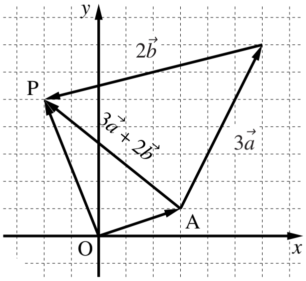
まず，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=3\vec{a}+2\vec{b}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8\\-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3-8\\6-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

◀



◀ ベクトルの分解を使って，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を原点 O を始点とするベクトル(原点に関する位置ベクトル)に書き換えた．

$$= \begin{pmatrix} -5+3 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

よって，点 P の座標は **(−2, 5)** である．

§ 5.2
内分点・外分点の位置ベクトル

ここでは，内分点・外分点の位置ベクトルの求め方を勉強する．なお，これから例題の題材として三角形の 5 心をピックアップして説明していく．

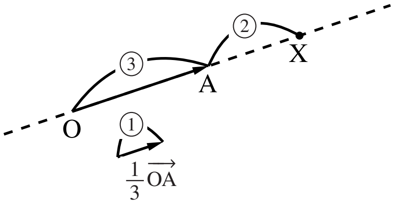
5.2.1　3 点が 1 直線上にある条件

■ベクトルの伸縮

たとえば，右図のように直線 OA 上に点 X があり，OA : AX = 3 : 2 であったとする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を「伸縮する」ことによって表すことができ

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

と書ける．



■3 点が一直線上にある条件

3 点 A，B，C が一直線上にあるのは，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を「伸縮する」ことによって表すことができる場合である．つまり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となる実数 k が存在することである．

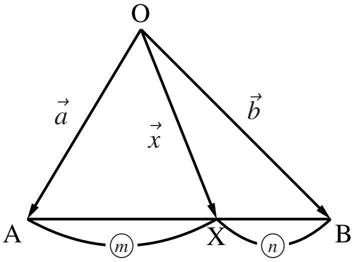
3 点が一直線上にある条件

3 点 A，B，C が一直線上にある

$\iff \overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k が存在する

5.2.2　内分点・外分点の位置ベクトル

■内分点の位置ベクトル



右図のように，点 O に関して 2 点，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) をとるとき，線分 AB を $m:n$ の比に内分する点 X の位置ベクトルである $\vec{x}$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$，m，n を用いて次のように表すことができる．

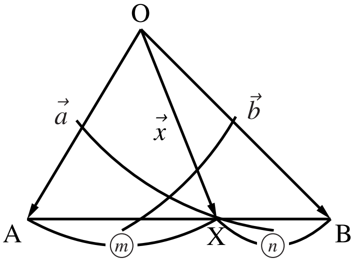
$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \overrightarrow{\mathrm{OX}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AX}} && \because \text{ベクトルの分解} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} && \because \text{ベクトルの伸縮} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) && \because \text{始点を O にする} \\
&= \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\
&= \frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\
&= \frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}
\end{aligned}$$

内分点の位置ベクトル

2 点 A ($\vec{a}$)，B ($\vec{b}$) を結ぶ線分 AB を $m:n$ の比に内分する点 X ($\vec{x}$) において，$\vec{x}$ は

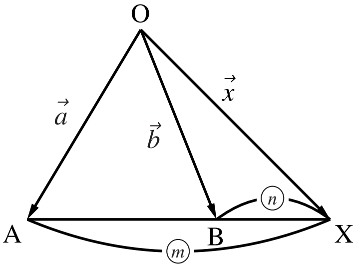
$$\vec{x} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

と表すことができる．



この式 $\vec{x} = \dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$ の分子 $n\vec{a}+m\vec{b}$ は，右図の太線で表したようにたすきをかけたような形になっていると覚えるとよい．

■**外分点の位置ベクトル**



右図のように，点 O に関して 2 点，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) をとるとき，線分 AB を $m:n$ の比に外分する点 X の位置ベクトルである $\vec{x}$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$，m，n を用いて次のように表すことができる[*2]．

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \overrightarrow{\mathrm{OX}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AX}} && \because \text{ベクトルの分解}
\end{aligned}$$

[*2] 図では $m>n$ としてあるが，$m<n$ の場合も同じ式で表すことができる．

$$= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \qquad \because \text{ベクトルの伸縮}$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \qquad \because \text{始点を O にする}$$

$$= \left(1 - \frac{m}{m-n}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$= \frac{-n}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$= \frac{-n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m-n} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

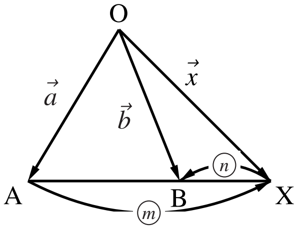
外分点の位置ベクトル

2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) を結ぶ線分 AB を $m:n$ の比に外分する点 X($\vec{x}$) において，$\vec{x}$ は

$$\vec{x} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

と表すことができる．

この式は，「$m:n$ に外分すること」は「$m:-n$ に内分すること」と等しいと覚えるとよい[3]．また，$\vec{x} = \dfrac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$ は分母・分子に -1 をかけることにより



$$\vec{x} = \frac{-(-n\vec{a} + m\vec{b})}{-(m-n)} = \frac{n\vec{a} - m\vec{b}}{n-m}$$

とも書けるので，「$-m:n$ に内分すること」とも等しいことがわかる．

【例題：内分点・外分点の座標】

原点を O(0, 0) とする座標平面上に 2 点 A(a_x, a_y)，B(b_x, b_y) があり，線分 AB を $m:n$ に内分する点を X とするとき，点 X の座標を求めよ．

また，線分 AB を $m:n$ に外分する点を Y とするとき，点 Y の座標を求めよ．

【解答】

内分点の位置ベクトルの式から

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

であり，これに $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{n}{m+n}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \frac{m}{m+n}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

---

[3] これは，右上図で「ⓜ と ⓝ の進む向きが逆」であることによるものである．

$$= \frac{1}{m+n}\begin{pmatrix} na_x \\ na_y \end{pmatrix} + \frac{1}{m+n}\begin{pmatrix} mb_x \\ mb_y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{m+n}\begin{pmatrix} na_x + mb_x \\ na_y + mb_y \end{pmatrix}$$

よって，点 X の座標は $\left(\boldsymbol{\frac{na_x + mb_x}{m+n}},\ \boldsymbol{\frac{na_y + mb_y}{m+n}}\right)$ となる．

また，外分点の位置ベクトルの式から

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \frac{-n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m-n} = \frac{-n}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

◀「$m : n$ に外分」は「$m : -n$ に内分」することと同じ

であり，これに $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{-n}{m-n}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \frac{m}{m-n}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{m-n}\begin{pmatrix} -na_x \\ -na_y \end{pmatrix} + \frac{1}{m-n}\begin{pmatrix} mb_x \\ mb_y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{m-n}\begin{pmatrix} -na_x + mb_x \\ -na_y + mb_y \end{pmatrix}$$

よって，点 Y の座標は $\left(\boldsymbol{\frac{-na_x + mb_x}{m-n}},\ \boldsymbol{\frac{-na_y + mb_y}{m-n}}\right)$ となる．

上の例題の結果は，FTEXT数学 II の『図形と方程式』でみた結果と一致する．

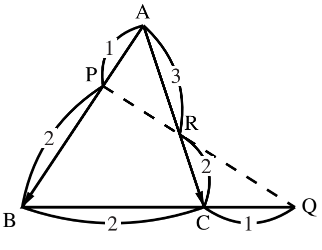
【例題：3 点が一直線上にある条件】

△ABC の辺 AB を 1 : 2 に内分する点を P，辺 BC を 3 : 1 に外分する点を Q，辺 CA を 2 : 3 に内分する点を R とするとき．3 点 P，Q，R は一直線上にあることを示せ．

【証明】

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおくと, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{-\vec{b}+3\vec{c}}{3-1} = \frac{-\vec{b}+3\vec{c}}{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{3}{5}\vec{c}$ と表すことができる．

◀



よって

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\frac{5}{6}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{AR}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$$

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であり，P，Q，R は同一直線上に

ある．■

【例題：重心の位置ベクトル】

$\triangle$ABC の重心を G とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(2) ある基準点 O からの位置ベクトルが，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ となるとき，重心の位置ベクトル G$(\vec{g})$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

【解答】

(1) 辺 BC の中点を M とおくと，重心の定義より BM : CM = 1 : 1 であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

また，重心の性質より AG : GM = 2 : 1 であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AG}} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}\\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$ となる．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AG}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \vec{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &= \vec{a} + \frac{1}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + \frac{1}{3}\left(\vec{c} - \vec{a}\right)\\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{\vec{g} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}}$ となる．

【例題：内心の位置ベクトル】

AB = c，BC = a，CA = b である $\triangle$ABC の内心を I とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(2) ある基準点 O からの位置ベクトルが，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ となるとき，内心の位置ベクトル I$(\vec{i})$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

【解答】

(1) 直線 AI と線分 BC の交点を D とすると，内心の定義より $\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{CAD}$ である．よって，角の二等分線の定理より $\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = c : b$ となるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

であり

$$\mathrm{BD} = \frac{c}{b+c} \cdot a = \frac{ac}{b+c}$$

である．

また，内心の定義より $\angle\mathrm{ABI} = \angle\mathrm{DBI}$ である．よって，角の二等分線の定理より

$$\mathrm{AI} : \mathrm{ID} = \mathrm{AB} : \mathrm{BD} = c : \frac{ac}{b+c} = b + c : a$$

である．

以上より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AI}} &= \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AD}}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \frac{b+c}{a+b+c}\left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \\ &= \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$ となる．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AI}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI}} &= \vec{a} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \vec{a} + \frac{b}{a+b+c}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + \frac{c}{a+b+c}\left(\vec{c} - \vec{a}\right) \\ &= \frac{a}{a+b+c}\vec{a} + \frac{b}{a+b+c}\vec{b} + \frac{c}{a+b+c}\vec{c}\end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{\vec{i} = \frac{a}{a+b+c}\vec{a} + \frac{b}{a+b+c}\vec{b} + \frac{c}{a+b+c}\vec{c}}$$

となる．

§ 5.3

平面ベクトルの1次独立

ここではベクトルの分解に関する定理を学習しよう．

5.3.1　ベクトルの1次結合の定義

■ベクトルの1次結合の定義

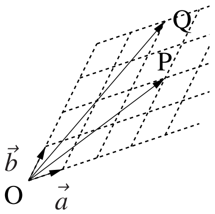
1次結合の定義

2つのベクトル，$\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，適当な実数 s，t を用いて

$$s\vec{a}+t\vec{b}$$

と表されるベクトルのことを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **1次結合** (linear combination) という．

たとえば，右図において，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ の1次結合で表すと



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\vec{a}+2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\vec{a}+4\vec{b}$$

となる．

このように，あるベクトルを2つの $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表すことを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ へのベクトルの**分解** (resolution) という（ベクトルの分解については p.121 参照）．

5.3.2　ベクトルの1次独立の定義

■ベクトルの1次独立の定義

1次独立の定義

「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が **1次独立** (linearly independent) である」とは

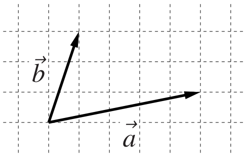
$$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0}$$

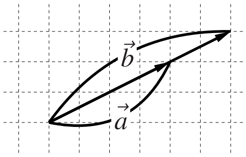
を満たす実数 s，t が $s=t=0$ のときに限る，ことである．

たとえば，右図のように平行でない $\vec{a}$，$\vec{b}$ では

$$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0}$$

となる s，t は $s=t=0$ のときに限られるので，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立である．





また，左図のように平行な $\vec{a}$，$\vec{b}$ では，$s=t=0$ のとき以外にも，たとえば $s=\dfrac{3}{2}$，$t=-1$ のときにも

$$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0}$$

を満たすので，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立であるとはいえない．

つまり，次のようなことがいえる．

1 次独立なベクトルと平行でないベクトル

$\vec{a}$，$\vec{b}$ が 1 次独立であるならば，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でない．逆に，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でなければ，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立である．

つまり

$$「\vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ が 1 次独立」} \Longleftrightarrow \vec{a} \not\parallel \vec{b}$$

である．

証明は背理法による．

5.3.3　1 次独立な平面ベクトルに関する定理

■1 次独立な平面ベクトルに関する定理

1 次独立なベクトルの 1 次結合に関して，次の定理が成り立つ．

1 次独立な平面ベクトルに関する定理

ある $\vec{p}$ が，1 次独立な 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の 1 次結合で

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$$
$$\vec{p}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$$

と 2 通りに表されたとする．このとき

$$\begin{cases} s=s' \\ t=t' \end{cases}$$

が成り立つ．つまり，$\vec{p}$ は 1 通りでしか表せない．

【証明】

$\vec{p}$ は

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$$

と表されるので

$$\begin{aligned} & s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b} \\ \Leftrightarrow\ & (s-s')\vec{a}+(t-t')\vec{b}=\vec{0} \end{aligned}$$

ここで，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立であるから，その定義より

$$\begin{cases} s-s'=0 \\ t-t'=0 \end{cases} \iff \begin{cases} s=s' \\ t=t' \end{cases}$$ ■

【例題：重心の定理】

△ABC の重心を G とし，辺 AB の中点を D，辺 CA の中点を E とするとき

CG : GD = 2 : 1

であることを，ベクトルの 1 次独立を用いて証明せよ．

【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおく．

まず，G は線分 CD 上にあるから，CG : GD = s : $1-s$ とおくと

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{\mathrm{AG}}=s\overrightarrow{\mathrm{AD}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{\mathrm{AG}}=s\cdot\frac{1}{2}\vec{b}+(1-s)\cdot\vec{c} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{s}{2}\vec{b}+(1-s)\vec{c} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \end{aligned}$$

◀『内分点の位置ベクトル』(p.129)

と表すことができる．

また，G は線分 BE 上にあるから，BG : GE = t : $1-t$ とおくと

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{\mathrm{AG}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AE}} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{\mathrm{AG}}=(1-t)\cdot\vec{b}+t\cdot\frac{1}{2}\vec{c} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{\mathrm{AG}}=(1-t)\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{aligned}$$

◀『内分点の位置ベクトル』(p.129)

と表すことができる．

いま，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，②より

$$\begin{cases} \dfrac{s}{2}=1-t \\ 1-s=\dfrac{t}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=\dfrac{2}{3} \\ t=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

よって

$$\mathrm{CG} : \mathrm{GD} = \frac{2}{3} : 1 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1.$$

■

【例題：角の二等分線の定理】

AB = c，BC = a，CA = b である △ABC において，∠A の 2 等分線と辺 BC の交点を D するとき

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = c : b$$

であることを，ベクトルの 1 次独立を用いて証明せよ．

【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおく．

まず，直線 AD は ∠BAC の二等分線なので，適当な実数 s を用いて

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathrm{AD}} = s\left(\frac{1}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{s}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{s}{b}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{s}{c}\vec{b} + \frac{s}{b}\vec{c} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \end{aligned}$$

◀ $\frac{1}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は大きさが 1 で等しいので $\frac{1}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は ∠BAC を 2 等分する直線上にある．これを**角の二等分ベクトル** (angle bisection vector) という．

と表すことができる．

また，点 D は辺 BC 上の内分点なので，BD : DC = t : $1 - t$ とおくと

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{aligned}$$

と表すことができる．

いま，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，②より

$$\begin{cases} \dfrac{s}{c} = 1 - t \\ \dfrac{s}{b} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \dfrac{bc}{b+c} \\ t = \dfrac{c}{b+c} \end{cases}$$

よって

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \frac{c}{b+c} : 1 - \frac{c}{b+c} = \frac{c}{b+c} : \frac{b}{b+c} = c : b$$

■

【例題：直線の交点の位置ベクトル】

△OAB において，辺 OA を 2 : 3 に内分する点を M，辺 OB を 4 : 3 に内分する点を N とし，線分 AN と線分 BM の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ を用いて表せ．

O を基準にした位置ベクトルを考えてみる．

【解答】

まず, 点 P は線分 BM 上にあるから, BP : PM = $s : 1-s$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OM}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

◀『内分点の位置ベクトル』(p.129)

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\cdot\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{2s}{5}\vec{a} + (1-s)\vec{b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表すことができる．

また，点 P は辺 AN 上にあるから，AP : PN = $t : 1-t$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$

◀『内分点の位置ベクトル』(p.129)

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\cdot\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\vec{a} + \frac{4t}{7}\vec{b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と表すことができる．

いま，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，②より

$$\begin{cases} \dfrac{2s}{5} = 1-t \\ 1-s = \dfrac{4t}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \dfrac{5}{9} \\ t = \dfrac{7}{9} \end{cases}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}}$$

§ 5.4

ベクトルの内積

ここではベクトル同士の積の一つであるベクトルの内積を学習する．内積は 2 つのベクトルのなす角と密接な関係があり，そのため図形の性質を求める際によく登場する演算法則である．

5.4.1　ベクトルの正射影

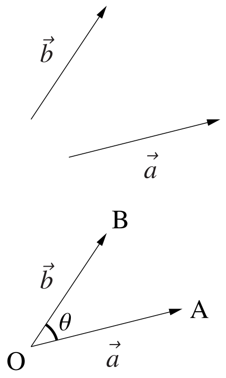
■ベクトルのなす角の定義

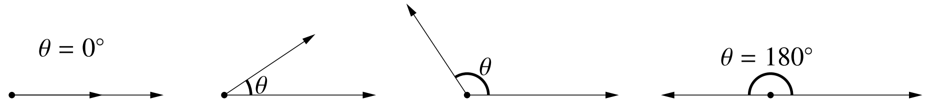
$\vec{0}$ でない 2 つの $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，点 O を始点として

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ,\quad \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となるように点 A，B をとる．このとき，∠AOB の大きさ θ は，$\vec{a}$, $\vec{b}$ によって決まる．この θ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**なす角** (included angle) という．

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が同じ向きのときは 0° であり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ 向きがすれるにつれだんだん大きくなり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が開ききって互いに逆向きとなるとき 180° となる．





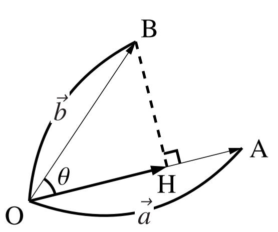
それ以上ベクトルが開いたときには，角度の狭いほうをなす角とするので，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ の取り得る範囲は $0° \leqq \theta \leqq 180°$ となる．

■ベクトルの正射影と有向距離

$\vec{0}$ でない 2 つの $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，点 O を始点として

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ,\quad \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となるように点 A，B をとる．

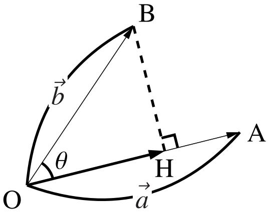


いま，右図の点 B からから直線 OA に下ろした垂線の足を H とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への**正射影** (orthogonal projection) ベクトルといい $_{\vec{b}\to}\vec{a}$ と表す[*4]．正射影ベクトル $_{\vec{b}\to}\vec{a}$ は，$\vec{a}$, $\vec{b}$ とそのなす角 θ を用いて次のように表すことができる．

1) **$0° \leqq \theta \leqq 90°$ のとき**

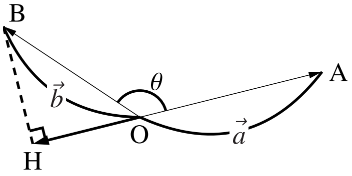
[*4] この表し方は FTEXT独自の表記であり，一般的ではない．

$$\begin{aligned}{}_{\vec{b}\to}\vec{a} &= \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB}\cos\theta}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= \frac{\left|\vec{b}\right|\cos\theta}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}\end{aligned}$$



2) **90° < θ ≦ 180° のとき**

$$\begin{aligned}{}_{\vec{b}\to}\vec{a} &= -\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\frac{\mathrm{OB}\cos(180^\circ-\theta)}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= \frac{\left|\vec{b}\right|\cos\theta}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}\end{aligned}$$



つまり，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ で ${}_{\vec{b}\to}\vec{a} = \dfrac{\left|\vec{b}\right|\cos\theta}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}$ と表せる．この $\left|\vec{b}\right|\cos\theta$ の値のことを，${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ の**有向距離**または**符号付長さ**という．

なお，${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ の大きさは

$$\left|{}_{\vec{b}\to}\vec{a}\right| = \left|\frac{\left|\vec{b}\right|\cos\theta}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}\right| = \frac{\left|\vec{b}\cos\theta\right|}{\cancel{\left|\vec{a}\right|}}\cancel{\left|\vec{a}\right|} = \left|\vec{b}\cos\theta\right|$$

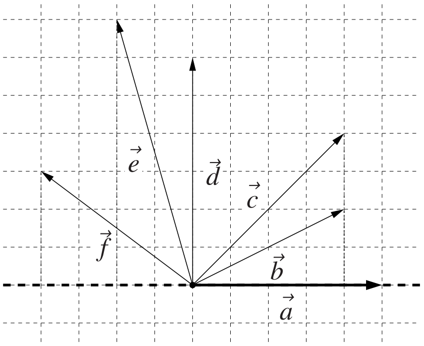
で表される．

【例】

ますめの一辺の長さが 1 の右図において

1) ${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ の有向距離は 4
2) ${}_{\vec{c}\to}\vec{a}$ の有向距離は 4
3) ${}_{\vec{d}\to}\vec{a}$ の有向距離は 0
4) ${}_{\vec{e}\to}\vec{a}$ の有向距離は −2
5) ${}_{\vec{f}\to}\vec{a}$ の有向距離は −4

となる．



5.4.2　ベクトルの内積

■ベクトルの内積の定義

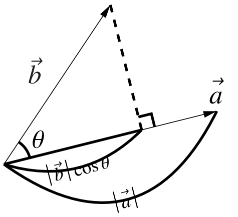
任意の 2 つのベクトル，$\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して**内積** (inner product) という演算 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を次のように定義する．

1) $\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

「$\vec{a}$ の大きさに，${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ の有向距離をかけたもの」，すなわち

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \times \left|\vec{b}\right| \cos\theta$$

とする．ここで，θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角である．



2) $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

とする．

ベクトルの内積

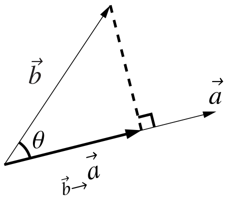
$\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

とする．ここで，θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角である．
また，$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ とする．

■正射影ベクトルの内積での表し方

$\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影ベクトル ${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ は



$$\begin{aligned}
{}_{\vec{b}\to}\vec{a} &= \frac{\left|\vec{b}\right|\cos\theta}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a} \\
&= \frac{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta}{\left|\vec{a}\right|^2}\vec{a} && \because \text{分母分子に } \left|\vec{a}\right| \text{ をかけた} \\
&= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|^2}\vec{a} && \because \vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta
\end{aligned}$$

と表すことができる．

■内積の計算法則

ベクトルの内積に関して，次の計算法則が成り立つ[*5]．

[*5] ベクトル空間の公理および，この公理を満たすものを**計量ベクトル空間**という．ただし，公理であるためには 4) は $\vec{a}\cdot\vec{a} \geqq 0$ かつ $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = 0$ である．

内積に関する計算法則

1) 交換法則

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2) 結合法則

$\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

3) 分配法則

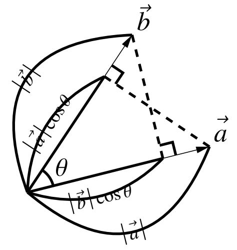
$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

4) $\vec{a}\cdot\vec{a}\geqq 0$

【証明】

ゼロベクトルを含む場合の成立は明らかなので，以下ベクトルはすべてゼロベクトルでないとする．

1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

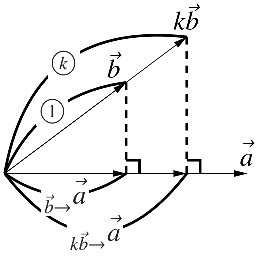


$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta$$

より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ■

2) 右図において，${}_{k\vec{b}\to}\vec{a}=k\,{}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ より



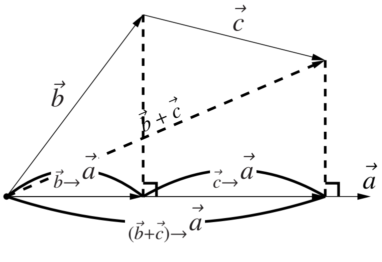
$$\frac{\vec{a}\cdot(k\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=k\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$ だから，係数を比較して

$$\frac{\vec{a}\cdot(k\vec{b})}{|\vec{a}|^2}=k\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}$$

$$\Leftrightarrow\ \vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})\qquad\blacksquare$$

3) 右図において，${}_{(\vec{b}+\vec{c})\to}\vec{a}={}_{\vec{b}\to}\vec{a}+{}_{\vec{c}\to}\vec{a}$ より



$$\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}+\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}+\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$ だから，係数を比較して

$$\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{a}|^2}=\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}+\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\qquad\blacksquare$$

4) 等しいベクトルどうしのなす角は 0° であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 \geqq 0 \qquad \blacksquare$$

等号成立は $|\vec{a}| = 0$，つまり $\vec{a} = 0$ のときに限る．

【例題：内積の計算法則】

次の計算が成り立つことを，内積の定義 (p.140) および内積の計算法則 1)〜3)(p.141) を用いて証明せよ．なお，(2) を証明する際には (1) を使ってよい．

(1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(2) $(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(u\vec{a}+v\vec{b}) = su|\vec{a}|^2+(sv+tu)\vec{a}\cdot\vec{b}+tv|\vec{b}|^2$

【解答】

(1)

$$\begin{aligned}
&(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} && \\
&= \vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) && \blacktriangleleft \text{計算法則 1)} \\
&= \vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b} && \blacktriangleleft \text{計算法則 3)} \\
&= \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} && \blacktriangleleft \text{計算法則 1)}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

(2)

$$\begin{aligned}
&(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(u\vec{a}+v\vec{b}) && \\
&= (s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(u\vec{a})+(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(v\vec{b}) && \blacktriangleleft \text{計算法則 3)} \\
&= (s\vec{a})\cdot(u\vec{a})+(t\vec{b})\cdot(u\vec{a})+(s\vec{a})\cdot(v\vec{b})+(t\vec{b})\cdot(v\vec{b}) && \blacktriangleleft \text{(1)} \\
&= su(\vec{a}\cdot\vec{a})+tu(\vec{b}\cdot\vec{a})+sv(\vec{a}\cdot\vec{b})+tv(\vec{b}\cdot\vec{b}) && \blacktriangleleft \text{計算法則 2)} \\
&= su(\vec{a}\cdot\vec{a})+(tu+sv)\vec{a}\cdot\vec{b}+tv(\vec{b}\cdot\vec{b}) && \blacktriangleleft \text{計算法則 1)} \\
&= su|\vec{a}|^2+(tu+sv)\vec{a}\cdot\vec{b}+tv|\vec{b}|^2 && \blacktriangleleft \text{定義}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

【例題：意味のある演算とない演算】

次に表す式のうち，無意味なものには×を，意味のあるものには○つけよ．

(1) $\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}$

(2) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$

(4) $\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$

(5) $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}}$

(6) $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$

【解答】

(1) （×）$\vec{a}$ はベクトルで $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は実数．よって，ベクトルと実数の和となり無意味である．

(2) （○）$\vec{a}\cdot\vec{b}$ は実数で $\vec{c}$ はベクトル．よって，$\vec{c}$ の $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 倍の意味をもつ．

(3) （×）2 つの · のうち，どちらを内積の記号とみるかで意味するものが異なるので無意味である．

(4) （○）$\vec{b}\cdot\vec{c}$ は実数で $\vec{a}$ はベクトル．よって，$\vec{a}$ の $\vec{b}\cdot\vec{c}$ 倍の意味をもつ．

(5) （×）ベクトルに除法はないので，分母に $\vec{a}$ がある時点で無意味である．

(6) （○）$\vec{a}\cdot\vec{b}$ は実数で $\left|\vec{a}\right|$ も実数であるのでその比を表す．

■成分表示された平面ベクトルの内積

成分表示された 2 つのベクトル，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$ の内積について考えてみよう．

まず，$\vec{e_x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{e_y}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ という 2 つのベクトル(**基本ベクトル** (fundamental vector))をとる．それぞれのベクトルの大きさは 1 であり，なす角は 90° であるから

$$\left|\vec{e_x}\right|=\left|\vec{e_y}\right|=1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

$$\vec{e_x}\cdot\vec{e_y}=0 \qquad \because \left|\vec{e_x}\right|\left|\vec{e_y}\right|\cos 90^\circ=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

が成り立つ．

ここで，$\vec{a}$ は

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\a_y\end{pmatrix}=a_x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+a_y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

であるから，$\vec{a}$ を $\vec{e_x}$，$\vec{e_y}$ に分解すると

$$\vec{a}=a_x\vec{e_x}+a_y\vec{e_y} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{③}$$

となる．

同様にして

$$\vec{b}=b_x\vec{e_x}+b_y\vec{e_y} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{④}$$

となる．

よって，③，④より

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(a_x\vec{e_x}+a_y\vec{e_y})\cdot(b_x\vec{e_x}+b_y\vec{e_y})\\&=a_xb_x\left|\vec{e_x}\right|^2+(a_xb_y+a_yb_x)\vec{e_x}\cdot\vec{e_y}+a_yb_y\left|\vec{e_y}\right|^2\\&=a_xb_x\left|\vec{e_x}\right|^2+a_yb_y\left|\vec{e_y}\right|^2 && \because\text{②}\\&=a_xb_x+a_yb_y && \because\text{①}\end{aligned}$$

となる．

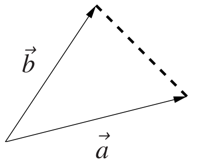
成分表示されたベクトルの内積

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y$$

となる.

【暗記：ベクトルを用いた三角形の面積公式】



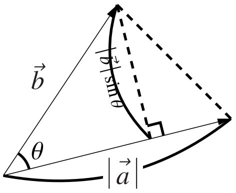
右の図のように，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる三角形の面積を S とする.

(1) S を $|\vec{a}|$ と $|\vec{b}|$ と $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を用いて表せ.

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ であるとき，S を a_x，a_y，b_x，b_y を用いて表せ.

(3) 座標平面上に 3 点 A(2, 1)，B(7, 2)，C(4, 5) をとる．このとき，△ABC の面積を求めよ.

【解答】



(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq 180°)$ とおき，$|\vec{a}|$ を三角形の底辺とみると，高さは $|\vec{b}|\sin\theta$ とかけるから，三角形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|\vec{a}|\times|\vec{b}|\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \end{aligned}$$

◀ $S = \frac{1}{2}$(底辺)×(高さ)

◀ $\sin^2 + \cos^2\theta = 1$ より $\sin^2 = 1 - \cos^2\theta$ であり，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ より $\sin\theta \geqq 0$ だから

◀ 内積の定義

よって，$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}$ と表せる.

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ のとき

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y$$

であるから，$S = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ に代入して

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{({a_x}^2 + {a_y}^2)({b_x}^2 + {b_y}^2) - (a_xb_x + a_yb_y)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{{a_x}^2{b_y}^2 + {b_x}^2{a_y}^2 - 2a_xb_xa_yb_y} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(a_xb_y - b_xa_y)^2} \\ &= \frac{1}{2}|\,a_xb_y - b_xa_y\,| \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{S = \dfrac{1}{2}|\,a_xb_y - b_xa_y\,|}$ と表せる．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ より，$\triangle$ABC の面積 S' は

$$S' = \frac{1}{2}|\,5\cdot4 - 1\cdot2\,| = \mathbf{9}$$

ベクトルを用いた三角形の面積公式

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}|\,a_xb_y - b_xa_y\,|$$

■ベクトルの垂直条件

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 90° とき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**垂直** (perpendicular) であるといい，$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}}$ と表す．また，$\vec{0}$ はすべてのベクトルに対し垂直と定める．

このとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ = 0$ となる．逆に，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ならば $\vec{a}\perp\vec{b}$ といえる．つまり

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

である．

また，成分表示された 2 つのベクトル，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ と $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$ が垂直であるとき

$$\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}=0\Longleftrightarrow a_xb_x+a_yb_y=0$$

が成り立つ．

ベクトルの垂直条件

$\vec{a}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$ であり，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$ とする．

$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0\iff a_xb_x+a_yb_y=0$$

【例題：外心の位置ベクトル】

AB = 3，BC = 7，CA = 5 である △ABC がある．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，△ABC の外心を O とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ をもちいて表せ．

【解答】

(1) △ABC に ∠A からみる余弦定理を使うと

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\theta&=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2}\\&=\frac{9+25-49}{2}=\frac{-15}{2}\end{aligned}$$

であるから

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\theta=\boldsymbol{\frac{-15}{2}}$$

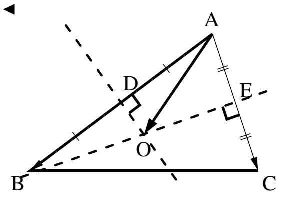
◀ $\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\theta$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=x\vec{b}+y\vec{c}$ とおく．

まず，$\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は直交するから

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{DO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\\Leftrightarrow\ &\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\\Leftrightarrow\ &\left(x\vec{b}+y\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0\\\Leftrightarrow\ &\left(x-\frac{1}{2}\right)\left|\vec{b}\right|^2+y\vec{b}\cdot\vec{c}=0\end{aligned}$$

◀



$$\Leftrightarrow\ 9\left(x-\frac{1}{2}\right)+y\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

$$\Leftrightarrow\ 9\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{15}{2}y=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{EO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は直交するから

$$\overrightarrow{\mathrm{EO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(x\vec{b}+y\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\vec{c}=0$$

$$\Leftrightarrow\ x\vec{b}\cdot\vec{c}+\left(y-\frac{1}{2}\right)\left|\vec{c}\right|^2=0$$

$$\Leftrightarrow\ x\vec{b}\cdot\vec{c}+25\left(y-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{15}{2}x+25\left(y-\frac{1}{2}\right)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

式①，②を連立して

$$\begin{cases}6x-5y=3\\-3x+10y=5\end{cases}\iff\begin{cases}x=\dfrac{11}{9}\\y=\dfrac{13}{15}\end{cases}$$

よって，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{11}{9}\vec{b}+\dfrac{13}{15}\vec{c}}$.

【例題：垂心の位置ベクトル】

AB = 5，BC = 6，CA = 4 である △ABC がある．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，△ABC の垂心を H とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ をもちいて表せ．

【解答 1：直交条件を使う】

(1) △ABC に ∠A からにらむ余弦定理を使うと

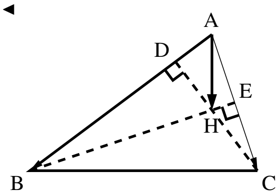
◀ $\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\theta$

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\theta=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2}$$
$$=\frac{25+16-36}{2}=\frac{5}{2}$$

であるから，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\theta=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=x\vec{b}+y\vec{c}$ とおく．

◀



まず，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は直交するから

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(x\vec{b}+y\vec{c}-\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=0\\
\Leftrightarrow\ &x\left|\vec{b}\right|^2+(y-1)\vec{b}\cdot\vec{c}=0\\
\Leftrightarrow\ &25x+(y-1)\frac{5}{2}=0\\
\Leftrightarrow\ &10x+y=1 \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①
\end{aligned}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は直交するから

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(x\vec{b}+y\vec{c}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0\\
\Leftrightarrow\ &(x-1)\vec{b}\cdot\vec{c}+y\left|\vec{c}\right|^2=0\\
\Leftrightarrow\ &(x-1)\frac{5}{2}+16y=0\\
\Leftrightarrow\ &5x+32y=5 \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②
\end{aligned}$$

式①，②を連立して

$$\begin{cases}10x+y=1\\ 5x+32=5\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{35}\\ y=\dfrac{1}{7}\end{cases}$$

よって，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{3}{35}\vec{b}+\frac{1}{7}\vec{c}}$.

【解答 2：正射影ベクトル＆一次独立を使う】

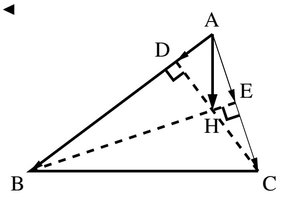
(1) （【解答 1】と同じ）

(2) ベクトルの正射影を考え

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|^2}\vec{b}=\frac{\frac{5}{2}}{25}\vec{b}=\frac{1}{10}\vec{b}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

◀



同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{5}{32}\vec{c} \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

である.

まず，点 H は線分 BE 上にあるから，BH : HE $= s$:

$1-s$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{AH}} = (1-s)\vec{b} + \frac{5s}{32}\vec{c} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

◀ ②より

また，点 H は線分 CD 上にあるから，CH : HD = t : $1-t$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = t\overrightarrow{\mathrm{AD}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{t}{10}\vec{b} + (1-t)\vec{c} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

◀ ①より

いま，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立であるから，③，④より

$$\begin{cases} 1-s = \dfrac{t}{10} \\ \dfrac{5s}{32} = 1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10s + t = 10 \\ 5s + 32t = 32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = \dfrac{32}{35} \\ t = \dfrac{6}{7} \end{cases}$$

よって，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{3}{35}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}}$.

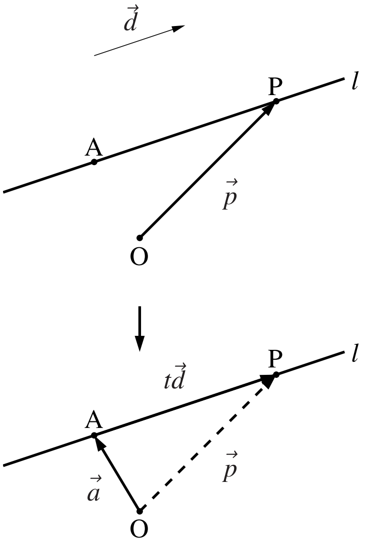
§ 5.5

ベクトル方程式

ここでは，ベクトルをもちいて，平面上の直線や円などの図形を表す方法について学んでいこう．

5.5.1　直線のベクトル方程式

■直線の通る 1 点と方向ベクトルが与えられたとき



点 A$(\vec{a})$ を通り $\vec{0}$ でない $\vec{d}$ に平行な直線を l とする．このとき，この直線上を動く点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ の表し方を考えよう．

まず，点 P が直線 l 上にある限り，必ず $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \vec{d}$ であるから，ベクトルの平行条件 (p.123) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{d}$$

となる実数 t が存在する．

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ はベクトルの分解 (p.121) を考えて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

つまり　$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$　…………………… ①

が成り立つ[*6]．

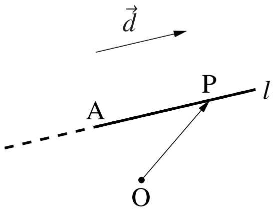
この①のことを，「点 A$(\vec{a})$ を通り $\vec{d}$ に平行な直線の**ベクトル方程式** (vector equation) 」といい，t をその**媒介変数** (parameter) という．また，$\vec{d}$ を，この直線の**方向ベクトル** (direction vector) という．

①で t がすべての実数をとって変化すれば，点 P は直線 l 上のすべての点を動く．また，t がある範囲で変化すれば，点 P は直線 l 上の一部の点を動く．

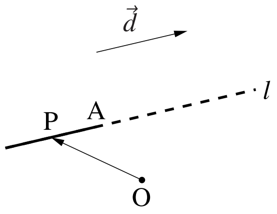
【例】

[*6] 感覚的には「O から P への向かう $(\vec{p})$ には，まず O から A への向かい $(\vec{a})$，それから $\vec{d}$ 方向に進めばよい $(t\vec{d})$」と理解できる．

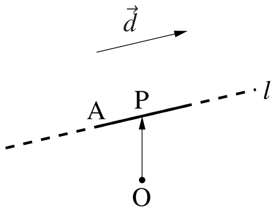
1) $0 \leqq t$ のとき



2) $t \leqq 0$ のとき



3) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき



次に，座標平面上で成分表示されたベクトルのベクトル方程式を考えてみよう．

点 $A(x_0,\ y_0)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$ である直線上の点 P の座標を $P(x,\ y)$ とおくと，$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$，$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であるから，①より

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = x_0 + d_x t \\ y = y_0 + d_y t \end{cases}$$

と表せる．これを，**t を媒介変数とする直線 l の方程式**という．

$d_x \fallingdotseq 0$ かつ $d_y \fallingdotseq 0$ のとき，この式から媒介変数 t を消去すると

$$(t =)\ \frac{x - x_0}{d_x} = \frac{y - y_0}{d_y}$$

$$\Leftrightarrow\ y = \frac{d_y}{d_x}(x - x_0) + y_0$$

となり，これは点 $(x_0,\ y_0)$ を通る傾き $\dfrac{d_y}{d_x}$ の直線の方程式として，FTEXT数学 II の『図形と方程式』ですでに学んだものと一致している．

【例題：直線のベクトル方程式〜その１〜】

以下のそれぞれについて，点 A を通り方向ベクトルを $\vec{d}$ とする直線 l の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ．また，媒介変数を用いない形で直線の方程式を表せ．

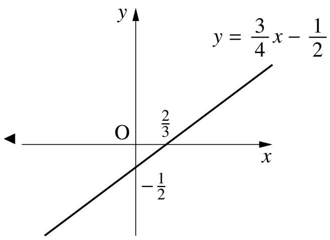
(1) $A(2,\ 1)$，$\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(2) $A(4,\ 0)$，$\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3) $A(-1,\ 3)$，$\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$　　(4) $A(-2,\ 1)$，$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

【解答】

(1) $\begin{cases} \boldsymbol{x = 2 + 4t} \\ \boldsymbol{y = 1 + 3t} \end{cases}$

上式と下式を t について解くと，$t = \dfrac{x-2}{4}$，$t = \dfrac{y-1}{3}$



となるから

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}\Leftrightarrow y-1=\frac{3}{4}(x-2)$$

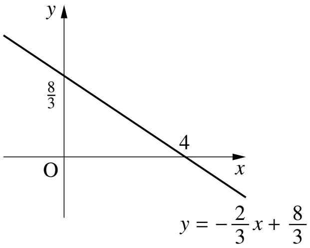
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}}.$$

(2) $\begin{cases}\boldsymbol{x=4-3t}\\ \boldsymbol{y=2t}\end{cases}$

上式と下式を t について解くと，$t=\dfrac{x-4}{-3}$，$t=\dfrac{y}{2}$ となるから

$$\frac{x-4}{-3}=\frac{y}{2}\Leftrightarrow y=\frac{2}{-3}(x-4)$$

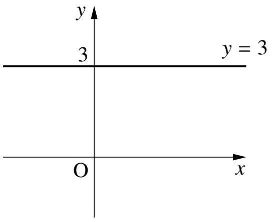
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}}.$$



(3) $\begin{cases}\boldsymbol{x=-1+2t}\\ \boldsymbol{y=3}\end{cases}$　上式と下式を t について解くと，$t=\dfrac{x-4}{-3}$，$t=\dfrac{y}{2}$ となるから

t が変化すると x はすべての実数をとるが，y は常に 3 であるから

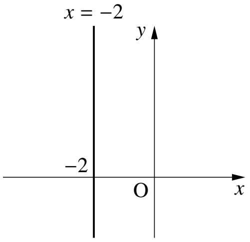
$$\boldsymbol{y=3}\quad (x\text{ はすべての実数}).$$



(4) $\begin{cases}\boldsymbol{x=-2}\\ \boldsymbol{y=1-3t}\end{cases}$

t が変化すると y はすべての実数をとるが，x は常に -2 であるから

$$\boldsymbol{x=-2}\quad (y\text{ はすべての実数}).$$

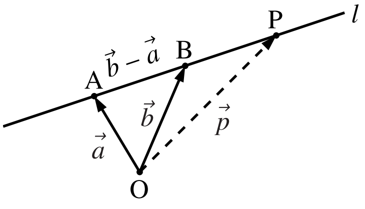


■直線の通る 2 点が与えられたとき

異なる 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線を l とする．このとき，l は点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$ の直線であるから，l 上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に関するベクトル方程式は，p.151 の①より

$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\Leftrightarrow\ \vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\qquad\cdots\cdots ①$$

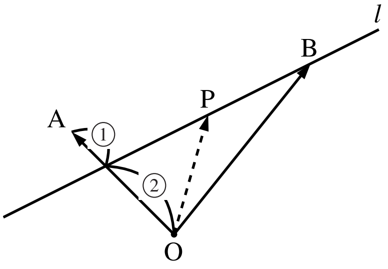


となる．

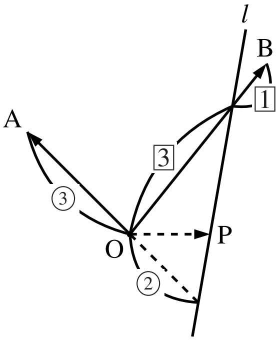
【例題：直線のベクトル方程式〜その２〜】

点 O に関する位置ベクトルを A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) とする．以下のそれぞれについて，直線 l 上の点 P($\vec{p}$) に関するベクトル方程式を適当な実数 t を用いて表せ．

(1)



(2)



【解答】

(1) 線分 OA を 2 : 1 に内分する点を C とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{2}{3}\vec{a}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

◀ p.153 の①を使った

つまり

$$\boldsymbol{\vec{p} = \frac{2(1-t)}{3}\vec{a} + t\vec{b}}$$

と表せる．

(2) 線分 OA を 2 : 5 に外分する点を C，線分 OB を 3 : 1 に内分する点を D とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\dfrac{2}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{3}{4}\vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

◀ p.153 の①を使った

つまり

$$\boldsymbol{\vec{p} = \frac{-2(1-t)}{3}\vec{a} + \frac{3t}{4}\vec{b}}$$

と表せる．

ここで，p.153 の①

$$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

は，$1 - t = s$ とおくことにより

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}\ \ (s + t = 1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

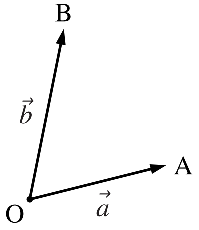
と表すこともできる．この s, t に適当な条件をつけることにより，半直線や領域などを表すベクトル方程式をつくることができる．

【例題：1 次結合で表された位置ベクトルの軌跡】

点 O に関する位置ベクトルを A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) とし，点 P が

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

を満たし動くものとする．以下の場合について，点 P の動く範囲を図示せよ．



(1) $s > 0$ かつ $t > 0$　　(2) $s < 0$ かつ $t > 0$

(3) $\dfrac{5}{2}s + \dfrac{2}{3}t = 1$　　(4) $s + t = \dfrac{2}{3}$

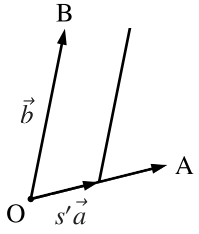
(5) $s > 0$ かつ $t > 0$ かつ $s + t < 1$

【解答】

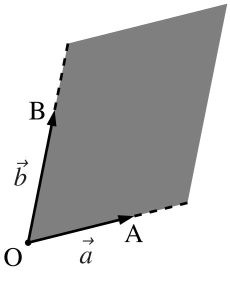
(1) まず，s をある定数 s' (> 0) で固定し

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s'\vec{a} + t\vec{b}\quad (t > 0)$$

を考えると，点 P は右図の半直線上にある．



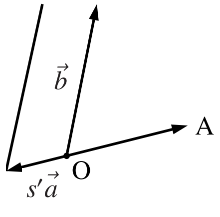
よって，s を動かすと答えは下図網掛け部分となる．



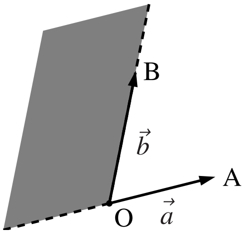
(2) まず，s をある定数 s' (> 0) で固定し

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s'\vec{a} + t\vec{b}\quad (t > 0)$$

を考えると，点 P は右図の半直線上にある．



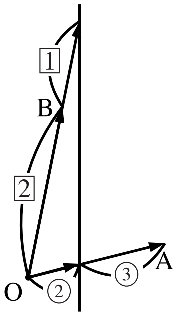
よって，s を動かすと答えは下図網掛け部分となる．



(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$$
$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{5s}{2}\left(\frac{2}{5}\vec{a}\right) + \frac{2t}{3}\left(\frac{3}{2}\vec{b}\right)$$

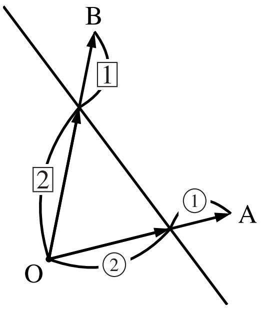
と変形でき，条件より $\frac{5s}{2} + \frac{2t}{3} = 1$ であるから，答えは下図の直線部分となる.



(4) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ は

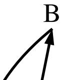
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$$
$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3s}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{a}\right) + \frac{3t}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{b}\right)$$

と変形でき，条件より $\frac{3s}{2} + \frac{3t}{2} = 1$ であるから，答えは下図の直線部分となる.



(5) まず，条件より $s > 0$, $t > 0$ であるから，点 P は (1) で求めた領域内にあることが必要.

次に，$s+t$ の値を k (< 1) で固定する，つまり $s+t = k$



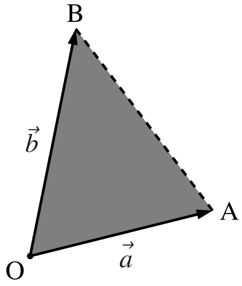
とすると，条件より $s > 0$, $t > 0$ であるから $k \fallingdotseq 0$ なので

$$
\begin{aligned}
& s + t = k \\
\Leftrightarrow\ & \frac{s}{k} + \frac{t}{k} = 1
\end{aligned}
$$

となり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ は

$$
\begin{aligned}
& \overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{s}{k}\left(k\vec{a}\right) + \frac{t}{k}\left(k\vec{b}\right)
\end{aligned}
$$

と変形できるので，点 P は
右上図の線分上を動く.
よって，$s + t$ の値を動かすと答えは下図網掛け部分となる.



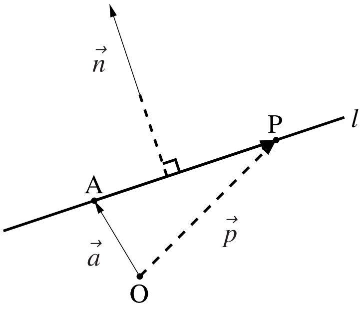
■直線の通る 1 点と法線ベクトルが与えられたとき

点 A($\vec{a}$) を通り $\vec{0}$ でない $\vec{n}$ に垂直な直線を l とする．このとき，この直線上を動く点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ の表し方を考えよう．

まず，点 P が直線 l 上にある限り，必ず $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \vec{n}$ であるから，ベクトルの垂直条件 (p.146) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \vec{n} = 0$$

となる．



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{p} - \vec{a}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \vec{n} = 0$$

つまり　$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$　……………………①

が成り立つ．

この①のことを，「点 A($\vec{a}$) を通り $\vec{n}$ に垂直な直線のベクトル方程式」という．また，$\vec{n}$ を，この直線の**法線ベクトル** (normal vector) という．

次に，座標平面上で成分表示されたベクトルのベクトル方程式を考えてみよう．

点 A(x_0, y_0) を通り，法線ベクトルが $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ である直線上の点 P の座標を P(x, y) とおくと，$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$，$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であるから，①より

$$\begin{aligned} & (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = 0 \end{aligned}$$

と表せる．

ここで，n_x を a，n_y を b，$-(n_x x_0 + n_y y_0)$ を c とおけば，この式は

$$ax + by + c = 0$$

と書きなおされ，これはの直線の方程式として，FTEXT数学 II『図形と方程式』ですでに学んだものと一致している．

また，このことから，直線 $ax + by + c = 0$ の法線ベクトルの 1 つとして $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が拾える．

【例題：直線のベクトル方程式〜その３〜】

次のそれぞれについて，点 A を通り法線ベクトルを $\vec{n}$ とする直線の方程式を求めよ．

(1) A(2, 1), $\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$　(2) A(4, 0), $\vec{n}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

(3) A(−1, 3), $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$　(4) A(−2, 1), $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

【解答】

直線 l 上を動く点 P の座標を $(x,\ y)$ とおく．

(1)
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0\\ \Leftrightarrow\ &\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=0\\ \Leftrightarrow\ &4(x-2)+3(y-1)=0\\ \Leftrightarrow\ &\boldsymbol{4x+3y-11=0}\end{aligned}$$

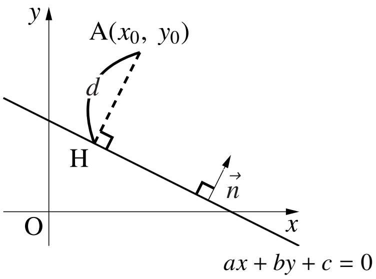
(2)
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0\\ \Leftrightarrow\ &\begin{pmatrix}x-4\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}=0\\ \Leftrightarrow\ &-3(x-4)+2y=0\\ \Leftrightarrow\ &\boldsymbol{3x-2y-12=0}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0\\ \Leftrightarrow\ &\begin{pmatrix}x-(-1)\\y-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=0\\ \Leftrightarrow\ &2(x+1)+0(y-3)=0\\ \Leftrightarrow\ &\boldsymbol{x+1=0}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0\\ \Leftrightarrow\ &\begin{pmatrix}x-(-2)\\y-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}=0\\ \Leftrightarrow\ &0(x+2)-3(y-1)=0\\ \Leftrightarrow\ &\boldsymbol{y-1=0}\end{aligned}$$

【例題：点と直線の距離の公式】

直線 $l : ax+by+c=0$ と点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0)$ との距離 d を求めよ.



【解答】

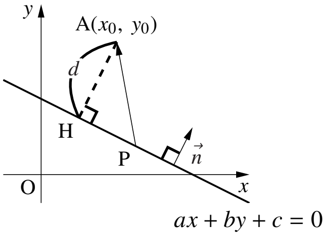
直線 l 上の点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とおくと，P の座標に関して

$$ax_1+by_1+c=0 \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

が成り立つ.

いま，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ を $\vec{n}$ に正射影したベクトル ${}_{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}\vec{n}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{HA}}$ と等しいので，この ${}_{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}\vec{n}$ の大きさが d となる.

◀



$$\begin{aligned}
{}_{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}\vec{n} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|^2}\vec{n}\\
&= \frac{\begin{pmatrix}x_0-x_1\\ y_0-y_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\\
&= \frac{a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\\
&= \frac{ax_0+by_0-ax_1-by_1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\\
&= \frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

◀ 正射影ベクトルの内積での表し方 (p.141)

◀ ①を使った

よって

$$\begin{aligned}
\left|{}_{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}\vec{n}\right| &= \left|\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right|\sqrt{a^2+b^2}\\
&= \frac{|ax_0+by_0+c|}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}\\
&= \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

つまり，$\boldsymbol{d = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ となる.

ここで，直線のベクトル方程式をまとめておこう.

直線のベクトル方程式

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とし，P は直線上の任意の点で，s，t は実数の変数，$\vec{n}\neq\vec{0}$ とする．

1) 点 A を通り，OD に平行な直線

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$$

2) 2 点 A，B を通る直線

$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\quad\text{または}\quad\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}\ (s+t=1)$$

3) 点 A を通り，$\vec{n}$ に垂直な直線

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$$

5.5.2　円のベクトル方程式

次に，点 O に関する位置ベクトルを用いて円を表す方法について考えてみよう．

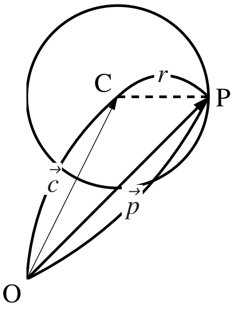
■中心と半径が与えられたとき

点 C$(\vec{c})$ を中心とする，半径 r の円を C とする．このとき，この円周上を動く点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ の表し方を考えよう．

点 P が円 C 上にあるとき，線分 CP の長さは常に r となる，すなわち $\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|=r$ となるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|=r$$

$$\Leftrightarrow\ \left|\vec{p}-\vec{c}\right|=r \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$



が成り立つ．この②を円 C のベクトル方程式という．

また，座標平面上で $\vec{c}$ が $\vec{c}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ と成分表示された場合，$\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおくと

$$\left|\vec{p}-\vec{c}\right|=r$$

$$\Leftrightarrow\ \left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|=r$$

$$\Leftrightarrow\ \left|\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\right|=r$$

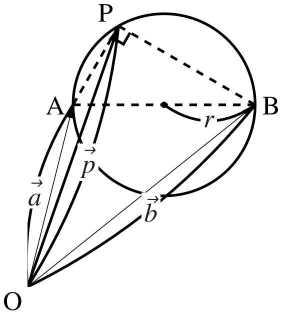
$$\Leftrightarrow\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$$

$$\Leftrightarrow\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

となり，これは FTEXT 数学 II の『図形と方程式』で学習した円の方程式と一致する．

■直径の両端が与えられたとき

異なる 2 点 $A(\vec{a})$ と $B(\vec{b})$ を直径の両端とするの円を C とする．このとき，この円周上を動く点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ の表し方を考えよう．



点 P が円 C 上にあるとき，線分 AP と BP は直交する，すなわち $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ となるから

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$$

$$\Leftrightarrow\ (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つ．この③も円 C のベクトル方程式である．

また，座標平面上で $\vec{a}$ が $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$，$\vec{b}$ が $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$ と成分表示された場合，$\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおくと

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}x-a_x\\y-a_y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-b_x\\y-b_y\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x-a_x)(x-b_x)+(y-a_y)(y-b_y)=0$$

となり，これは 2 点 $A(a_x,\ a_y)$，$B(b_x,\ b_y)$ を直径とする円の方程式を表す．

【例題：円のベクトル方程式の別表記】

異なる 2 点 $A(\vec{a})$ と $B(\vec{b})$ を直径の両端とする円を C とする．p.162 の③より，円 C のベクトル方程式は

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$

であったが，円 C の中心の位置ベクトルは $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$，半径は $\dfrac{|\vec{b}-\vec{a}|}{2}$ となるので，p.161 の②より

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=\frac{|\vec{b}-\vec{a}|}{2}$$

とも表される．

いま，この 2 式が等しくなることをベクトルの計算で証明せよ．

【解答】

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right| = \frac{|\vec{b}-\vec{a}|}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2 = \frac{|\vec{b}-\vec{a}|^2}{4}$$

◀ 両辺が正なので，2 乗しても同値が保たれる．

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p}\right|^2 - \vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) + \frac{|\vec{a}+\vec{b}|^2}{4} = \frac{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2}{4}$$

◀ $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p}\right|^2 - \vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b}) = 0 \qquad \blacksquare$$

【例題：円のベクトル方程式】

平面上に定点 $A(\vec{a})$ があり，点 $P(\vec{p})$ が以下の式を満たしながら動くとき，P はどのような軌跡を描くか考えよ．

(1) $\left|\vec{p}\right|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{p} = 4\left|\vec{a}\right|^2$　　(2) $\left|\vec{p}-\vec{a}\right| = 2\left|\vec{p}\right|$

【解答】

(1)

$$\left|\vec{p}\right|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{p} + \left|\vec{a}\right|^2 = 4\left|\vec{a}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p}-\vec{a}\right|^2 = 4\left|\vec{a}\right|^2$$

◀ ベクトルの計算での「平方完成」

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p}-\vec{a}\right| = 2\left|\vec{a}\right|$$

よって, P は **A を中心とする半径2 × OA の円**を描く.

(2)

$$\left|\vec{p}-\vec{a}\right| = 2\left|\vec{p}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p}-\vec{a}\right|^2 = 2\left|\vec{p}\right|^2$$

◀ 両辺正なので，2 乗しても同値は保たれる

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p}\right|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{p} + \left|\vec{a}\right|^2 = 4\left|\vec{p}\right|^2$$

◀ $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$

$$\Leftrightarrow 3\left|\vec{p}\right|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{p} = \left|\vec{a}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p}^{2}\right| + \frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{p} = \frac{1}{3}\left|\vec{a}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p}+\frac{1}{3}\vec{a}\right|^2 = \frac{4}{9}\left|\vec{a}\right|^2$$

◀ ベクトルの計算での「平方完成」

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p}+\frac{1}{3}\vec{a}\right| = \frac{2}{3}\left|\vec{a}\right|$$

よって，P は $\mathbf{B}\left(-\frac{1}{3}\vec{a}\right)$ **を中心とする半径** $\frac{2}{3}$ **× OA の円**を描く．

【例題：円の接線のベクトル方程式】

点 C($\vec{c}$) を中心とする半径 r の円周上の点 $\mathrm{P}_0(\vec{p_0})$ における接線のベクトル方程式は，この接線上を動く点を P($\vec{p}$) として

$$(\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$$

と表されることを示せ．

また，$\vec{c}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$，$\vec{p_0}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ としたとき，接線の方程式を求めよ．

【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{CP}_0}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ のなす角を θ として，この 2 つのベクトルの内積を考えると

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\mathrm{CP}_0\times\mathrm{CP}\times\cos\theta$$

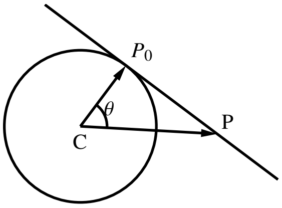
$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{CP}_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}={\mathrm{CP}_0}^2$$

◀ $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{CP}_0}$ に正射影した

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{CP}_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=r^2$$

◀

$$\Leftrightarrow\ (\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2 \quad ■$$



接線の方程式は，$\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおき，いま得られた式に，

$\vec{c}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$，$\vec{p_0}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$，$\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を代入して

$$(\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}x_1-x_0\\y_1-y_0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}=r^2$$

$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{(x_1-x_0)(x-x_0)+(y_1-y_0)(y-y_0)=r^2}$$

となる．

$\overrightarrow{\mathrm{CP}_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}}=0$ より $(\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{p_0})=0$ もある．

以上，円のベクトル方程式をまとめておこう．

円のベクトル方程式

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ とし，P は円周上の任意の点とする．

1) 中心 C，半径 r の円

$$\left|\vec{p} - \vec{c}\right| = r$$

2) 線分 AB を直径とする円

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$

第 6 章

空間ベクトルの演算

§ 6.1

空間における点・直線・平面

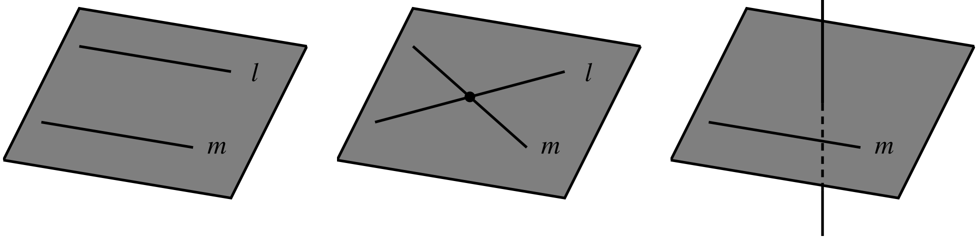
ここではまず，空間における直線や平面の位置関係についてまとめておく．

6.1.1　2 直線の位置関係

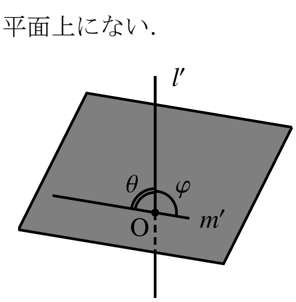
■2 直線の位置関係

異なる 2 直線 l, m の位置関係には次の 3 つの場合がある．

1) **平行である**　　2) **1 点で交わる**　　3) **ねじれの位置にある**



1), 2) の場合は 2 直線は同じ平面上にあり，3) の場合は同じ平面上にない．



3) の場合，右の図のように，任意の 1 点 O を通り l, m にそれぞれ平行な直線 l', m' をひくと，点 O のとり方に関係なく，2 つの角 θ, φ が決まる．$\theta + \varphi = 180°$ となるので，片方の角度が決まればもう片方の角度も決まる．この 2 つの角のうち大きくないほう，すなわち $\theta \leqq \varphi$ のときの θ を 2 直線 l, m のなす角という．

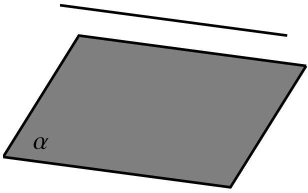
2), 3) の場合において，特に l, m のなす角が直角であるとき，l と m は垂直であるといい，$l \perp m$ と書く．さらに，垂直である 2 直線が交わるとき，直交するという．

6.1.2　直線と平面の位置関係

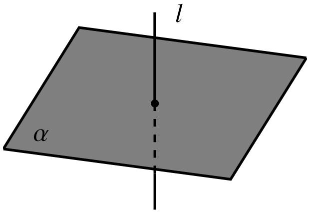
■直線と平面の位置関係

直線 l と平面 α の位置関係には，次の 3 つの場合がある．

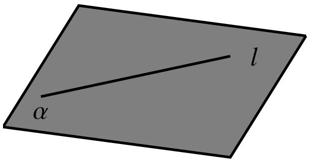
1) **平行である**



2) **1 点で交わる**



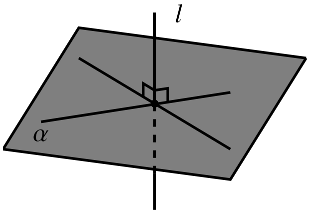
3) **l は α 上にある**



右図のように，直線 l が平面 α 上のすべての直線と垂直であるとき，l と α は垂直である，または直交するといい，$l \perp \alpha$ と表す．また，このとき，l を平面 α の垂線という．

実は，直線 l が平面 α 上の異なる 2 直線と垂直であれば，l は α 上のすべての直線と垂直となって，$l \perp \alpha$ となる．

平面 α 上にない点 A を通る α の垂線が，平面 α と交わる点 H を，点 A から平面 α におろした垂線の足という．

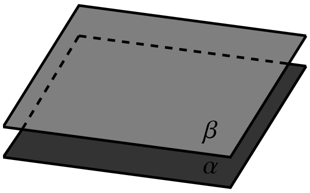


6.1.3　2 平面の位置関係

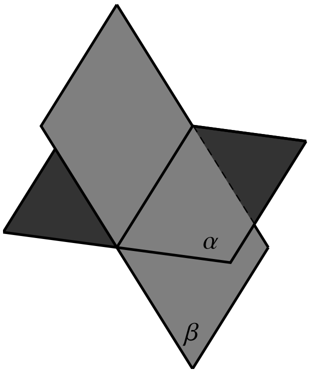
■2 平面の位置関係

異なる 2 平面 α，β の位置関係には，次の 2 つの場合がある．

1) **平行である**



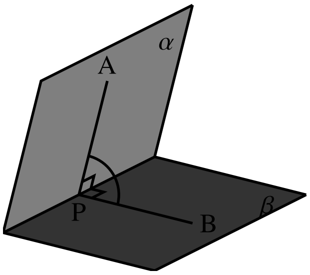
2) **交わる**



1) のように，2 平面 α，β が共有点をもたないとき，この 2 平面は平行であるといい，$alpha \parallel \beta$ とかく．

また，2) のように，2 つの平面 α，β が共有点をもつとき，この 2 平面はその共有点を含むある 1 つの直線を共有する．このとき，この 2 平面は交わるといい，この直線を α と β の交線という．

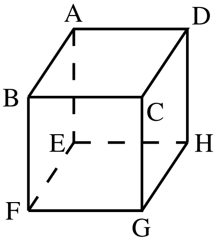
交わる 2 平面 α，β の交線上の点 P から交線に垂直な直線 PA，PB をそれぞれ α，β 上に引くと，P のとり方に関係なく $\angle$APB の大きさは一定となる．この角を 2 平面 α，β のなす角という．特に，$\angle\text{APB} = 90^\circ$ のとき，α と β は直交する，または垂直であるといい，$\alpha \perp \beta$ と書く．



【例題：空間における点・直線・平面】

右図の立方体について，以下の問いに答えよ．

(1) AB と FH のなす角を求めよ．
(2) AB と FC のなす角を求めよ．
(3) BD と AH のなす角を求めよ．
(4) 平面 ABCD と平面 BFHD のなす角を求めよ．
(5) DF と平面 EFGH のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．



【解答】

(1) AB と FH のなす角は，EF と FH のなす角と等しい．したがって，$\triangle$EFH は $1 : 1 : \sqrt{2}$ の二等辺三角形なので，**45°** である．
(2) AB と FC のなす角は EF と FC のなす角と等しいので，**90°** である．
(3) BD と AH のなす角は BD と BG のなす角と等しい．したがって，$\triangle$BGD は正三角形なので，**60°** である．
(4) 図より，**90°** である．
(5) 立方体の 1 辺の長さを 1 とすると，$\text{DF} = \sqrt{3}$，$\text{FH} = \sqrt{2}$ であるから

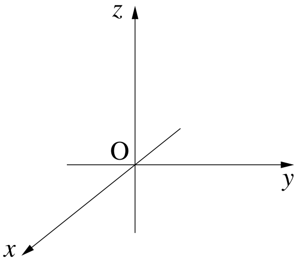
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

§ 6.2
空間座標

直線上の点や平面上の点を座標を用いて表す方法はすでに学んでいるので，ここでは空間における座標について考えてみよう．

6.2.1　空間での座標の表し方

■空間での座標の表し方



空間内に 1 点 O を定め，O で互いに直交する 3 つの直線 Ox，Oy，Oz を引く．これらの各直線を，O を原点とする数直線と考えたとき，Ox，Oy，Oz を**座標軸** (coordinate axis)，または**直交座標軸** (orthogonal axis) といい，座標軸定められた空間を**座標空間** (coordinate space) という．

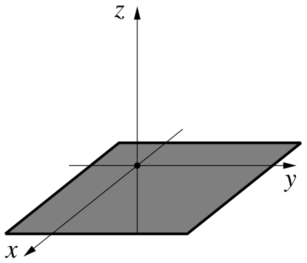
このときの O のことを座標空間の**原点** (limiting point) といい，数直線 Ox，Oy，Oz をそれぞれ，***x* 軸** (x-axis)，***y* 軸** (y-axis)，***z* 軸** (z-axis) という．

また，下図に示すように

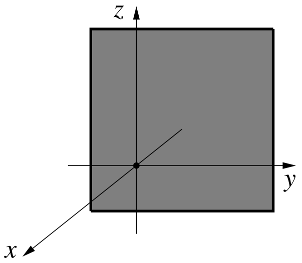
x 軸と y 軸を含む平面を ***xy* 平面** (xy-plane)
y 軸と z 軸を含む平面を ***yz* 平面** (yz-plane)
z 軸と x 軸を含む平面を ***zx* 平面** (zx-plane)

という．

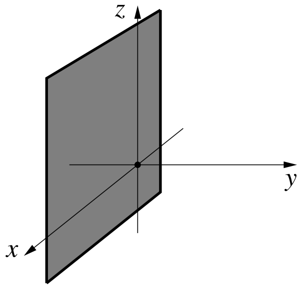
1) xy 平面



2) yz 平面

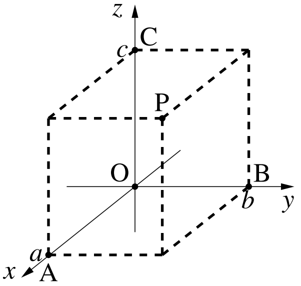


3) zx 平面



空間座標内のある点 P を通り，3 つの座標軸のそれぞれに直交する各平面が，x 軸，y 軸，z 軸と交わる点を，それぞれ A，B，C とし，その各座標軸上における座標を，それぞれ a，b，c とする．

このとき定まる 3 つの実数の組 $(a,\ b,\ c)$ を点 P の**座標** (coordinate) といい，a，b，c をそれぞれ点 P の ***x* 座標** (x-coordinate)，***y* 座標** (y-coordinate)，***z* 座標** (z-coordinate) という．点 P の座標が $(a,\ b,\ c)$ であるとき，$\mathbf{P}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$ と表す．



【例題：空間座標】

以下の問いに答えよ．

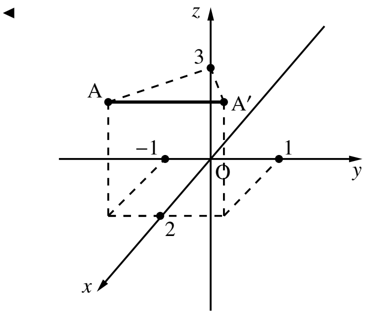
(1) A(2, −1, 3) と xz 平面について対称な点 A′ の座標を求めよ．

(2) A(3, −2, 4) と B(2, 0, 3) について，線分 AB の長さを求めよ．

【解答】

(1) 右図のように y 座標の符号が変化し，x，z 座標は不変であるから，A′ の座標は **(2, 1, 3)** である．

(2) $$\mathrm{AB} = \sqrt{(2-3)^2+(0+2)^2+(3-4)^2} = \boldsymbol{\sqrt{6}}$$



§ 6.3

空間ベクトルの定義

空間の場合にも，「ベクトルとは何か (p.107)」での考え方を拡張して，空間におけるベクトルを導入しよう．

6.3.1　空間ベクトルとは何か

■空間ベクトルの定義

空間内の有向線分 AB から，その“位置”を無視して“向き”と“大きさ”だけに着目したものを **(空間) ベクトル**といい，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表すことにする．

■空間ベクトルの相等

「平面上のベクトルの相等 (p.109)」と同じように，空間内でも 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ の“向き”と“大きさ”が等しいとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

と書くことにし，このとき $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は**等しい**ということにする．

■空間ベクトルの大きさの表し方

空間ベクトルの場合にも，「ベクトルの大きさの表し方 (p.110)」と同様に，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ や $\vec{a}$ の大きさを，それぞれ

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|,\ |\vec{a}|$$

と表す．ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ は，(有向) 線分 AB の長さに等しい．

6.3.2　空間ベクトルの成分表示

■空間ベクトルを成分で表す

「平面ベクトルを成分で表す (p.110)」と同じように，今度は座標空間内にあるベクトルの成分を用いた表し方についてみていこう．

右図のように，座標空間内に 2 点

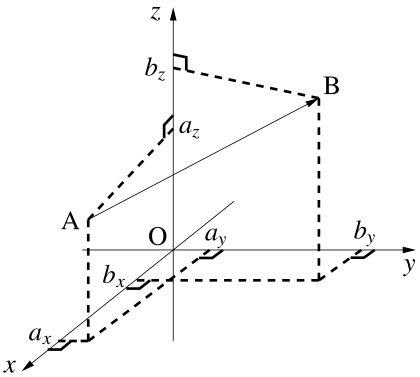
$\mathrm{A}(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\mathrm{B}(b_x,\ b_y,\ b_z)$

があるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を

x の増分 : $b_x - a_x$

y の増分 : $b_y - a_y$

z の増分 : $b_z - a_z$



を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{pmatrix}$ と表すことにする．

$b_x - a_x$ の値を **x 成分** (x-component) , $b_y - a_y$ の値を **y 成分** (y-component) , $b_z - a_z$ の値を **z 成分** (z-component) という．

■成分表示された空間ベクトルの相等

「成分表示された平面ベクトルの相等 (p.111)」は，空間ベクトルの場合にも拡張される．

一般に，2 つの $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ の相等に関して

$$\vec{a} = \vec{b} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}$$

が成り立つ．

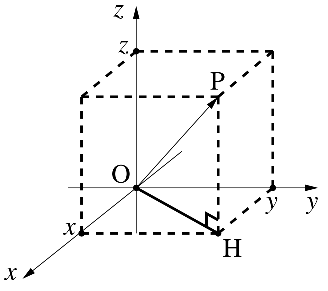
■成分表示された空間ベクトルの大きさ

空間ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の大きさは，線分 OP の長さである．いま，この線分の長さを求めてみよう．

点 P から，xy 平面に下ろした垂線の足を H とすると，H の座標は $(x,\ y,\ 0)$ であるから，三平方の定理より

$$\mathrm{OH}^2 = x^2 + y^2$$

である．また，△POH は H を直角とする直角三角形であるから，再び三平方の定理より



$$\mathrm{OP}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{PH}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

となり

$$\mathrm{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

と計算できる．

これより，2 点，$\mathrm{A}(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\mathrm{B}(b_x,\ b_y,\ b_z)$ 間の距離は，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{pmatrix}$ を用いて

$$\mathrm{AB} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$$

と計算できる．

§ 6.4

空間ベクトルの演算

空間ベクトルの場合にも，平面ベクトル同様に演算を導入しよう．

6.4.1　空間ベクトルの加法

■ベクトルの加法の定義

「平面ベクトルの加法 (p.113)」と同じように，空間ベクトルの加法も定義する．

ベクトルの加法についての計算法則

1) 交換法則
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2) 結合法則
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

は，空間ベクトルの場合にもそのまま成り立つ．

また，逆ベクトル，ゼロベクトルも同様に定義する．

■成分表示された空間ベクトルの加法

成分表示された空間ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ に関して，和 $\vec{a}+\vec{b}$ は

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_x+b_x \\ a_y+b_y \\ a_z+b_z \end{pmatrix}$$

となる．

6.4.2　空間ベクトルの減法

■ベクトルの減法の定義

「平面ベクトルの減法 (p.116)」と同じように，空間ベクトルの減法も定義する．

■成分表示された平面ベクトルの減法

成分表示された空間ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ に関して，差 $\vec{a} - \vec{b}$ は

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

となる．

6.4.3　ベクトルの実数倍

■ベクトルの実数倍の定義

「平面ベクトルの実数倍 (p.117)」と同じように，空間ベクトルの実数倍も定義する．

ベクトルの実数倍についての計算法則

1) 結合法則
   $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$
2) ベクトルの分配法則
   $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$
3) 実数倍の分配法則
   $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

は，空間ベクトルの場合にもそのまま成り立つ．

また，単位ベクトルも同様に定義する．

■成分表示された空間ベクトルの実数倍

成分表示された空間ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ に関して，実数倍 $m\vec{a}$ は

$$m\vec{a} = m\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_x \\ ma_y \\ ma_z \end{pmatrix}$$

となる．

■空間ベクトルの平行条件

2 つの空間ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の平行に関しても，平面の場合と同様に

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} = k\vec{b} \text{となる } k \in \mathbb{R} \text{ が存在する}$$

である．

また，成分表示された 2 つのベクトル，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ と $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ が平行であるとき

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kb_x \\ kb_y \\ kb_z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_x = kb_x \\ a_y = kb_y \\ a_z = kb_z \end{cases} \iff \begin{cases} k = \dfrac{a_x}{b_x} \\ k = \dfrac{a_y}{b_y} \\ k = \dfrac{a_z}{b_z} \end{cases}$$

より $(k =)\ \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$，つまり

$a_xb_y = a_yb_x$ かつ $a_yb_z = a_zb_y$[*1]

が成り立つ．

【例題：空間ベクトルの成分】

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$，$\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\left|\vec{b}\right|$ を求めよ．
(2) $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ の成分を求めよ．
(3) $\left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right|$ を求めよ．
(4) $\vec{x} + \vec{y} = 2\vec{a}$，$2\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = 2\vec{b}$，$\vec{x} + 3\vec{y} + 2\vec{z} = \vec{c}$ をみたす $\vec{x}$，$\vec{y}$，$\vec{z}$ の成分を求めよ．
(5) $\vec{b}$ と反対向きの単位ベクトルを求めよ．

【解答】

(1)　$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} = \boldsymbol{\sqrt{29}}$

◀『成分表示された空間ベクトルの大きさ』(p.173)

(2)

$$2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2-6 \\ 2-3+15 \\ 2+4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-6} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{18} \end{pmatrix}$$

(3) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ を成分で表すと

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[*1] この関係から $a_zb_x = a_xb_z$ も成り立つ

となるので

$$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right| = \sqrt{1^2+9^2+1^2} = \boldsymbol{\sqrt{83}}$$

◀『成分表示された空間ベクトルの大きさ』(p.173)

(4) $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ を連立方程式として考えると

$$\begin{cases} \vec{x}+\vec{y}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ \text{①} \\ 2\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=\begin{pmatrix}4\\6\\-8\end{pmatrix} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ \text{②} \\ \vec{x}+3\vec{y}+2\vec{z}=\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ \text{③} \end{cases}$$

① × 2 − ② より

$$\vec{y}-\vec{z}=\begin{pmatrix}0\\-2\\12\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ \text{④}$$

③ $\times\ \frac{1}{2}$ − ① $\times\ \frac{1}{2}$ より

$$\vec{y}+\vec{z}=\begin{pmatrix}-2\\\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ \text{⑤}$$

④ + ⑤ より

$$2\vec{y}=\begin{pmatrix}-2\\-\frac{1}{2}\\13\end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\vec{y}=\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{4}\\\frac{13}{2}\end{pmatrix}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ \text{⑥}$$

④, ⑥ より $\boldsymbol{\vec{z}=\begin{pmatrix}-1\\\frac{7}{4}\\-\frac{11}{2}\end{pmatrix}}$ である.

また，①, ⑥ より $\boldsymbol{\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\\frac{9}{4}\\-\frac{9}{2}\end{pmatrix}}$ である.

(5) (1) より，求めるベクトルは

$$-\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

【例題：空間ベクトルの平行条件】

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} z-1 \\ 2 \\ z+1 \end{pmatrix}$ のとき，$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b}$ となることはあるか.

【解答】

もし，$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b}$ ならば
空間ベクトルの平行条件 $a_xb_y = a_yb_x$かつ $a_yb_z = a_zb_y$ つまり

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 = (-1) \cdot (z-1) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦ \\ -1 \cdot (z+1) = 5 \cdot 2 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧ \end{cases}$$

が成り立つはずである．だが，⑦ より $z = -3$, ⑧ より $z = -11$ である．したがって，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行となることはない.

第 7 章

空間ベクトルと空間図形

§ 7.1

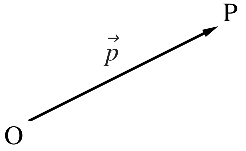
内分点・外分点の位置ベクトル

空間のベクトルの内分・外分点の位置ベクトルに関しても，「平面の内分点・外分点の位置ベクトル (p.128)」と同様に考えることができる.

7.1.1 空間内での位置ベクトル

■空間内での位置ベクトル

空間内でも平面上のときと同様にして，基準とする点 O をあらかじめ定めておくと，任意の点 P の位置は

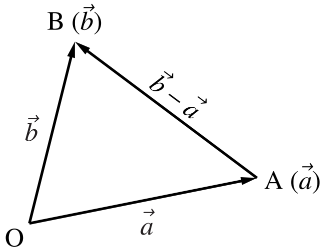


$$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

という $\vec{p}$ によって表すことができる.

この $\vec{p}$ を，点 O に関する点 P への位置ベクトルという．また，位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P を，P $(\vec{p})$ と表す.

点 O に関して，2 点 A，B がそれぞれ，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ であるとき



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$$

と表される.

つまり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は「終点 B の位置ベクトルから，始点 A の位置ベクトルを引いた差」に等しい.

7.1.2　空間内での内分点・外分点の位置ベクトル

■内分・外分点の位置ベクトル

点 O に関して空間内の 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ をとるとき，線分 AB を $m:n$ の比に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$，および外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$，m，n を用いて次のように表すことができる．

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}\ ,\ \ \vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

これより，2 点 $\mathrm{A}(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\mathrm{B}(b_x,\ b_y,\ b_z)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を P，外分する点を Q とすると，点 P，Q の座標は次のようになる．

$$\mathrm{P}\left(\frac{na_x+mb_x}{m+n},\ \frac{na_y+mb_y}{m+n},\ \frac{na_z+mb_z}{m+n}\right)$$
$$\mathrm{Q}\left(\frac{-na_x+mb_x}{m-n},\ \frac{-na_y+mb_y}{m-n},\ \frac{-na_z+mb_z}{m-n}\right)$$

■空間内の三角形の重心

点 O に関して空間内の 3 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ をとるとき，△ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて次のように表すことができる．

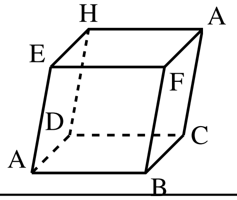
$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

これより，3 点 $\mathrm{A}(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\mathrm{B}(b_x,\ b_y,\ b_z)$，$\mathrm{C}(c_x,\ c_y,\ c_z)$ を結んでできる空間内の三角形の重心を G とすると，点 G の座標は次のようになる．

$$\mathrm{G}\left(\frac{a_x+b_x+c_x}{3},\ \frac{a_y+b_y+c_y}{3},\ \frac{a_z+b_z+c_z}{3}\right)$$

【例題：空間内の三角形の重心】

右図のような平行六面体において, △EDB, △FAC, △CFH, △DGE の重心をそれぞれ，G_1，G_2，G_3，G_4 とするとき，この 4 点は平行四辺形をなすことを証明せよ．



【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とすると，G_1，G_2，G_3，G_4 の位置ベクトル，$\vec{g}_1$，$\vec{g}_2$，$\vec{g}_3$，$\vec{g}_4$ は

$$\vec{g}_1=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

◀『空間内の三角形の重心』(p.??)

$$\vec{g}_2=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

◀『空間内の三角形の重心』(p.??)

$$\vec{g}_3 = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

◀『空間内の三角形の重心』(p.??)

$$\vec{g}_4 = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

◀『空間内の三角形の重心』(p.??)

となり

$$\overrightarrow{\mathrm{G_1G_2}} = \vec{g}_2 - \vec{g}_1 = \frac{1}{3}\vec{a}$$

◀『空間内での位置ベクトル』(p.181)

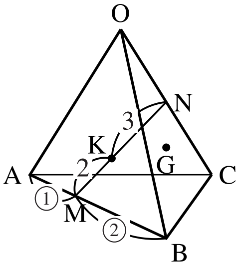
$$\overrightarrow{\mathrm{G_3G_4}} = \vec{g}_4 - \vec{g}_3 = -\frac{1}{3}\vec{a}$$

◀『空間内での位置ベクトル』(p.181)

であるから，平行四辺形をなすことがわかる．■

【例題：内分点・外分点の位置ベクトル】

四面体 O-ABC で，AB を 1 : 2 に内分する点を M，OC の中点を N，MN を 2 : 3 に内分する点を K，△OBC の重心を G とするとき，3 点 A，K，G は同一直線上にあることを示せ．



【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{1}{2}\vec{c}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

◀『空間内での内分点・外分点の位置ベクトル』(p.182)

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

◀『空間内の三角形の重心』(p.??)

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OM}} + 2\overrightarrow{\mathrm{ON}}}{5} = \frac{1}{5}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

◀『空間内での内分点・外分点の位置ベクトル』(p.182)

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \overrightarrow{\mathrm{OK}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{5}(-3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{3}(-3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ となるので，A，K，G は一直線上にある．■

§ 7.2

空間ベクトルの1次独立

1次独立な空間ベクトルに関しても，「1次独立な平面ベクトルに関する定理 (p.135)」と同様に考えることができる．

7.2.1　ベクトルの1次結合の定義

■ベクトルの1次結合の定義

2つの $\vec{a}$，$\vec{b}$ に関する1次結合は，「ベクトルの1次結合の定義 (p.134)」で見たように，適当な実数 s，t を用いて

$$s\vec{a}+t\vec{b}$$

と表されるベクトルのことであった．

ここでは，これを拡張して，3つの $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ に関する1次結合を次のように定義する．

1次結合の定義

3つのベクトル，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ に対して，適当な実数 s，t，u を用いて

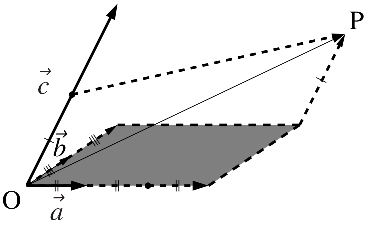
$$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$$

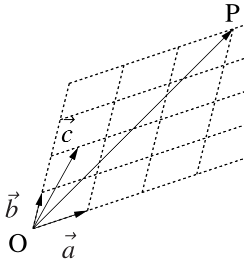
と表されるベクトルのことを，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の1次結合という．

たとえば，右図の空間において $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の1次結合で表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\vec{a}+2\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

とただ1通りに表せる．





また，左図の平面おいて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の1次結合で表すと

$$\begin{array}{lllllll}\overrightarrow{\mathrm{OP}} & = & 4\vec{a} & + & 0\vec{b} & + & 2\vec{c}\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} & = & 6\vec{a} & + & 4\vec{b} & + & 0\vec{c}\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} & = & 5\vec{a} & + & 2\vec{b} & + & \vec{c}\\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

などいろいろな方法で表せる．

7.2.2　ベクトルの 1 次独立の定義

■ベクトルの 1 次独立の定義

2 つの $\vec{a}$，$\vec{b}$ が 1 次独立であることの定義は，「ベクトルの 1 次独立の定義 (p.134)」で見たように

$$s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0}$$

を満たす実数 s，t が $s = t = 0$ のときに限る，ことであった．

ここでは，これを拡張して，3 つの $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ に関する 1 次独立を次のように定義する．

1 次独立の定義

「$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が **1 次独立**である」とは

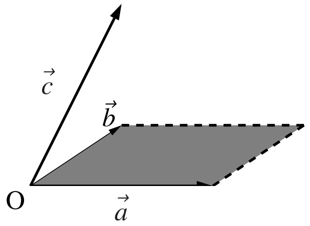
$$s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} = \vec{0}$$

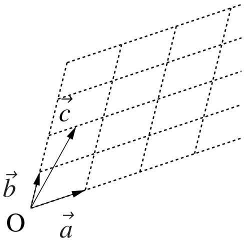
を満たす実数 s，t，u が $s = t = u = 0$ のときに限る，ことである．

たとえば，右図のように空間内にある $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ では

$$s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} = \vec{0}$$

となる s，t は $s = t = u = 0$ のときに限られるので，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立である．





また，左図のように同一平面上にある $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$（$\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ を満たす）では，$s = t = u = 0$ のとき以外にも，たとえば $s = -1$，$t = -2$，$u = 1$ のときや，$s = 2$，$t = 4$，$u = -2$ のときも

$$s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} = \vec{0}$$

を満たすので，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるとはいえない．

つまり，次のようなことがいえる．

1 次独立なベクトルと平行でないベクトル

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が 1 次独立であるならば，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は同一平面内にない．逆に，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が同一平面になければ，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立である．

つまり

「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が 1 次独立」$\Longleftrightarrow$ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$が同一平面内にない

である．

証明は省略．

7.2.3　1 次独立な空間ベクトルに関する定理

■1 次独立な空間ベクトルに関する定理

2 つの 1 次独立なベクトルの 1 次結合に関して,「1 次独立な平面ベクトルに関する定理 (p.135)」が成り立った．ここでは，これを拡張した，3 つの 1 次独立なベクトルの 1 次結合に関する次の定理を示す.

1 次独立な空間ベクトルに関する定理

ある $\vec{p}$ が，1 次独立な $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の 1 次結合で

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$$
$$\vec{p} = s'\vec{a} + t'\vec{b} + u'\vec{c}$$

と 2 通りに表されたとする．このとき

$$\begin{cases} s = s' \\ t = t' \\ u = u' \end{cases}$$

が成り立つ．つまり，$\vec{p}$ は 1 通りでしか表せない.

【証明】

$\vec{p}$ は

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} = s'\vec{a} + t'\vec{b} + u'\vec{c}$$

と表されるので

$$\begin{aligned} & s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} = s'\vec{a} + t'\vec{b} + u'\vec{c} \\ \Leftrightarrow\ & (s - s')\vec{a} + (t - t')\vec{b} + (u - u')\vec{c} = \vec{0} \end{aligned}$$

ここで，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次独立であるから，その定義より

$$\begin{cases} s - s' = 0 \\ t - t' = 0 \\ u - u' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s = s' \\ t = t' \\ u = u' \end{cases}$$ ■

【例題：空間内の直線の交点の位置ベクトル】

空間内の四面体 OABC において，辺 AB の中点を E，辺 OC を 2 : 1 に内分する点を F，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を P とする．また，Q を辺 BC 上の点とする．線分 EF と PQ のが交点 X をもつとき，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ.

【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．

まず，X は線分 EF 上にあるから，EX : XF = $s:1-s$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OE}}+s\overrightarrow{\mathrm{OF}}$$

◀『内分点の位置ベクトル』(p.182

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OX}}=(1-s)\cdot\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+s\cdot\frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{1-s}{2}\vec{a}+\frac{1-s}{2}\vec{b}+\frac{2s}{3}\vec{c}\qquad\cdots\cdots\cdots①$$

と表すことができる．

また，X は線分 PQ 上にあるから，PX : XQ = $t:1-t$ とおき，また，点 Q について BQ : QC = $u:1-u$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

◀『内分点の位置ベクトル』(p.182)

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OX}}=(1-t)\cdot\frac{1}{3}\vec{a}+t\cdot\left\{(1-u)\vec{b}+u\vec{c}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{1-t}{3}\vec{a}+t(1-u)\vec{b}+tu\vec{c}\qquad\cdots\cdots\cdots②$$

と表すことができる．

いま，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから，①，②より

$$\begin{cases}\dfrac{1-s}{2}=\dfrac{1-t}{3}\\ \dfrac{1-s}{2}=t(1-u)\\ \dfrac{2s}{3}=tu\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-3s=2-2t\\ \dfrac{1-s}{2}=t-tu\\ \dfrac{2s}{3}=tu\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{3s-1}{2}\\ \dfrac{3-3s}{6}=t-tu\\ \dfrac{4s}{6}=tu\end{cases}$$

以下，連立方程式

$$\begin{cases}t=\dfrac{3s-1}{2} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ③\\ \dfrac{3-3s}{6}=t-tu & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ④\\ \dfrac{4s}{6}=tu & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ⑤\end{cases}$$

を解く．

まず，④ + ⑤ より

$$t = \frac{3+s}{6}$$

これを③に代入して

$$\frac{3+s}{6} = \frac{3s-1}{2} \Leftrightarrow 6 + 2s = 18s - 6$$
$$\therefore s = \frac{3}{4}$$

これと④より，$t = \dfrac{5}{8}$ である．これらと⑤より，$u = \dfrac{4}{5}$ となる．

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \boldsymbol{\frac{1}{8}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}}$$

§ 7.3

空間ベクトルの内積

平面ベクトルの場合と同じように，空間ベクトルでもベクトルの内積を定義する．

7.3.1　空間ベクトルの正射影

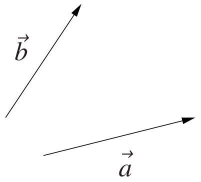
■ベクトルのなす角の定義

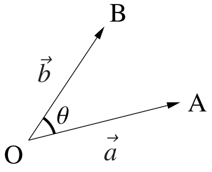
まず平面ベクトルの場合 (p.139) と同じように，空間ベクトルでもベクトルのなす角を定義する．

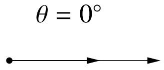
$\vec{0}$ でない 2 つの空間ベクトル，$\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，点 O を始点として

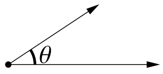
$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ,\ \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

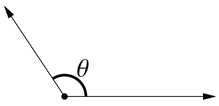
となるように点 A，B をとる．このとき，∠AOB の大きさ θ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$ によって決まる．この θ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角とする．

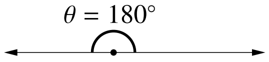












なす角の取り得る範囲は，平面ベクトルの場合と同様に $0° \leqq \theta \leqq 180°$ となる．

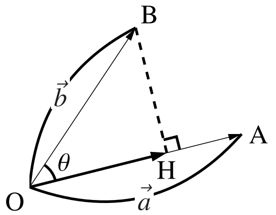
■ベクトルの正射影と有向距離

平面ベクトルの場合 (p.139) と同じように，空間ベクトルでもベクトルの正射影と有向距離を定義する．

$\vec{0}$ でない 2 つの空間ベクトル，$\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，点 O を始点として

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ,\ \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

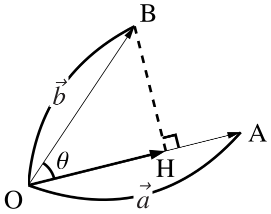
となるように点 A，B をとる．



いま，右図の点 B からから直線 OA に下ろした垂線の足を H とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影ベクトルといい $_{\vec{b}\to}\vec{a}$ と表す．正射影ベクトル $_{\vec{b}\to}\vec{a}$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$ とそのなす角 θ を用いて次のように表すことができる．

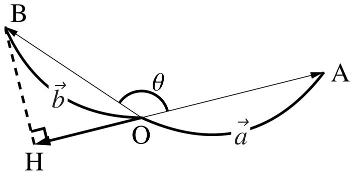
1) $\mathbf{0° \leqq \theta \leqq 90°}$ のとき

$$\begin{aligned}{}_{\vec{b}\to}\vec{a} &= \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB}\cos\theta}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= \frac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}\vec{a}\end{aligned}$$



2) **$90° < \theta \leqq 180°$ のとき**

$$\begin{aligned}{}_{\vec{b}\to}\vec{a} &= -\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\frac{\mathrm{OB}\cos(180° - \theta)}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= \frac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}\vec{a}\end{aligned}$$



つまり，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ で ${}_{\vec{b}\to}\vec{a} = \dfrac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}\vec{a}$ と表せる．この $|\vec{b}|\cos\theta$ の値のことを，${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ の**有向距離**または**符号付長さ**という．

なお，${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ の大きさは

$$\left|{}_{\vec{b}\to}\vec{a}\right| = \left|\frac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}\vec{a}\right| = \frac{|\vec{b}\cos\theta|}{\cancel{|\vec{a}|}}\cancel{|\vec{a}|} = |\vec{b}\cos\theta|$$

で表される．

7.3.2　ベクトルの内積

■ベクトルの内積の定義

平面ベクトルの場合 (p.140) と同じように，空間ベクトルでもベクトルの内積を定義する．

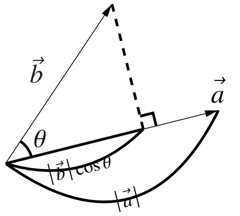
任意の 2 つの空間ベクトル，$\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して**内積**という演算 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を次のように定義する．

1) **$\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき**

「$\vec{a}$ の大きさに，${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ の有向距離をかけたもの」，すなわち

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}| \times |\vec{b}|\cos\theta$$

とする．ここで，θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角である．



2) **$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のとき**

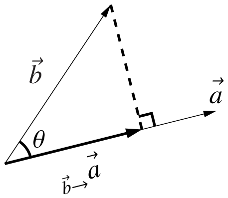
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

とする．

■空間の正射影ベクトルの内積での表し方

平面ベクトルの場合 (p.141) と同じように，空間ベクトルでも同様な形で，正射影ベクトルを内積で表すことができる．

$\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影ベクトル ${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ は



$$\begin{aligned}
{}_{\vec{b}\to}\vec{a} &= \frac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}\vec{a} \\
&= \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|^2}\vec{a} \qquad \because \text{分母分子に } |\vec{a}| \text{ をかけた} \\
&= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} \qquad \because \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta
\end{aligned}$$

と表すことができる.

■内積の計算法則

平面ベクトルの場合 (p.141) と同じように，空間ベクトルの内積でも，次のような計算法則が成り立つ.

内積に関する計算法則

1) 交換法則
$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
2) 結合法則
$\vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
3) 分配法則
$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
4) $\vec{a}\cdot\vec{a} \geqq 0$

【証明】は p.141 と同様.

■成分表示された空間ベクトルの内積

成分表示された 2 つの空間ベクトル，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ の内積について考えてみよう.

まず，$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ について，それぞれのベクトルの大きさは 1 であり，どの 2 つのベクトルのなす角も 90° であるから

$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_y| = 1$ …………………… ①

$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y = 0$, $\vec{e}_y\cdot\vec{e}_z = 0$, $\vec{e}_z\cdot\vec{e}_x = 0$ …………………… ②

が成り立つ.

ここで，$\vec{a}$ は

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_z \end{pmatrix} = a_x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから，$\vec{a}$ を $\vec{e_x}$，$\vec{e_y}$，$\vec{e_z}$ に分解すると

$$\vec{a} = a_x\vec{e_x} + a_y\vec{e_y} + a_z\vec{e_z} \qquad \cdots\cdots ③$$

となる．

同様にして

$$\vec{b} = b_x\vec{e_x} + b_y\vec{e_y} + b_z\vec{e_z} \qquad \cdots\cdots ④$$

となる．

よって，③，④より

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_x\vec{e_x} + a_y\vec{e_y} + a_z\vec{e_z})\cdot(b_x\vec{e_x} + b_y\vec{e_y} + b_z\vec{e_z}) \\ &= a_xb_x\left|\vec{e_x}\right|^2 + a_yb_y\left|\vec{e_y}\right|^2 + a_zb_z\left|\vec{e_z}\right|^2 && \because ② \\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z && \because ①\end{aligned}$$

となる．

【例題：空間ベクトルの内積】

次の 2 つのベクトルの内積の値とそのなす角 θ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ を求めよ．

(1) $(-1,\ -2,\ 1)$，$(1,\ -1,\ 2)$

(2) $(1,\ 0,\ -1)$，$(1,\ 2,\ -2)$

【解答】

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -1\cdot 1 - 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 = \mathbf{3}$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ であるので，

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{3}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ より，$\boldsymbol{\theta = 60°}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 1 + 0\cdot 2 - 1\cdot(-2) = \mathbf{3}$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ であるので，

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ より，$\boldsymbol{\theta = 45°}$

■空間ベクトルの垂直条件

平面ベクトルの場合 (p.146) と同じように，空間ベクトルでもベクトルの垂直を定義する．

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 90° とき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直であるといい，$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}}$ と表す．また，$\vec{0}$ はすべてのベクトルに対し垂直と定める．

このとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ となる．逆に，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ならば $\vec{a}\perp\vec{b}$ といえる．つまり

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

である．

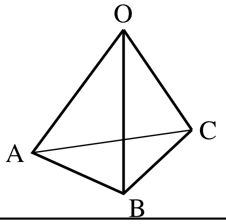
また，成分表示された 2 つのベクトル，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ と $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ が垂直であるとき

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0$$

が成り立つ．

【例題：空間ベクトルの垂直条件】

正四面体 O-ABC で，OA⊥OB が垂直であることを証明せよ．



【解答】

正四面体であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

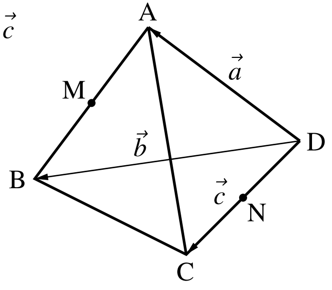
より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \end{aligned}$$

以上から，OA⊥OB であることが示せた．　■

【例題：空間ベクトルの内積と垂直条件】

1 辺の長さ 2 の正四面体 ABCD がある．AB の中点を M，CD の中点を N とする．$\overrightarrow{\mathrm{DA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \vec{c}$ とおくとき，以下の問いに答えよ．



(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．
(3) MN⊥AB であることを証明せよ．
(4) $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ を求めよ．
(5) $\overrightarrow{\mathrm{DM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ のなす角の余弦を求めよ．

【解答】

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = \mathbf{2}$

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{DN}} - \overrightarrow{\mathrm{DM}}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$
$$= \frac{1}{2}\Big(-\vec{a} \cdot \vec{b} + \left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2$$
$$+ \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c}\Big)$$

ここで，(1) と ABCD が正四面体であることから，$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 2$ であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}(-2 + 4 - 4 + 2 + 2 - 2) = 0$$

したがって，MN⊥AB である．■

(4)
$$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2$$
$$+ 2\left(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a}\right)$$
$$= 4 + 4 + 4 + 2(2 + 2 + 2) = 24$$

したがって，$\boldsymbol{\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right| = 2\sqrt{6}}$ である．

(5) △DAB は正三角形であり，M が AB の中点であることから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DM}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right| \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

となり，また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}} &= \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}\\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\right) = 2\end{aligned}$$

である．したがって，$\overrightarrow{\mathrm{DM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{DM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{DM}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{DC}}\right|} = \frac{2}{2\cdot\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

§ 7.4

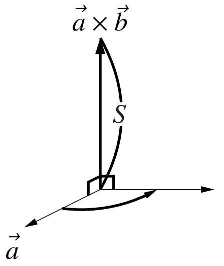
ベクトルの外積

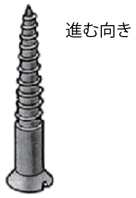
剛体の運動や，電磁気現象などを記述するには，ここで学ぶベクトルの計算が役に立つ．以下ではその計算方法について学んでいこう．

7.4.1　ベクトルの外積

■ベクトルの外積の定義

任意の 2 つのベクトル，$\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して**外積**という演算 $\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ を次





右ねじの回転

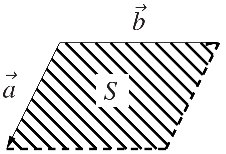
1) **$\boldsymbol{\vec{a}} \neq \boldsymbol{\vec{0}}$ かつ $\boldsymbol{\vec{b}} \neq \boldsymbol{\vec{0}}$ のとき**

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を含む平面内で，$\vec{a}$ の向きから $\vec{b}$ の向きへの回転を考える．$\vec{a}\times\vec{b}$ は，このような回転により右ねじが進む向きをもつベクトルであり，大きさは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ によって張られる平行四辺形の大きさとする．

2) **$\boldsymbol{\vec{a}} = \boldsymbol{\vec{0}}$ または $\boldsymbol{\vec{b}} = \boldsymbol{\vec{0}}$ のとき**

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$$

とする．



■外積の計算法則

ベクトルの外積に関して，次の計算法則が成り立つ．

外積に関する計算法則

1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

2) 結合法則

$\vec{a}\times(k\vec{b}) = k(\vec{a}\times\vec{b})$

3) 分配法則

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

【証明】

ゼロベクトルを含む場合の成立は明らかなので，以下ベクトルはすべてゼロベクトルでないとする．

1) まず，$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{b}\times\vec{a}$ の大きさは，共に $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積であり等しい．

また，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ右ねじを回して進む向きと，$\vec{b}$ から $\vec{a}$ へ右ねじを回して進む向きはちょうど逆になるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{b}\times\vec{a}$ は互いに逆ベクトルとなり

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

が成り立つ．■

2) $k = 0$ のときの成立は明らかなので，それ以外の場合について証明する．

$k > 0$ のとき

まず，$\vec{a}\times(k\vec{b})$ と $k(\vec{b}\times\vec{a})$ の大きさは，共に $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積を k 倍したものであり等しい．

また，$k\vec{b}$ と $\vec{b}$ は同じ向きを向いているから，$\vec{a}$ から $k\vec{b}$ へ右ねじを回して進む向きと，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ右ねじを回して進む向きは等しくなる．

$k < 0$ のとき

まず，$\vec{a}\times(k\vec{b})$ と $k(\vec{b}\times\vec{a})$ の大きさは，共に $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積を $-k$ 倍したものであり等しい．

また，$k\vec{b}$ と $\vec{b}$ は逆を向いているから，$\vec{a}$ から $k\vec{b}$ へ右ねじを回して進む向きと，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ右ねじを回して進む向きは逆になり，$\vec{a}\times\vec{b}$ を k 倍することにより，結局同じ向きを向く

以上から，任意の実数 k に対して

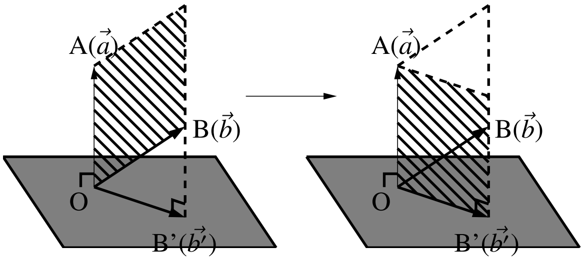
$$\vec{a}\times(k\vec{b}) = k(\vec{a}\times\vec{b})$$

が成り立つ．

3) まず準備として，$\vec{a}\times\vec{b}$ について少し考察しておく．

右図のように，$\vec{a}$，$\vec{b}$，および $\vec{a}$ に垂直な平面に $\vec{b}$ を正射影した $\vec{b'}$ を考える．

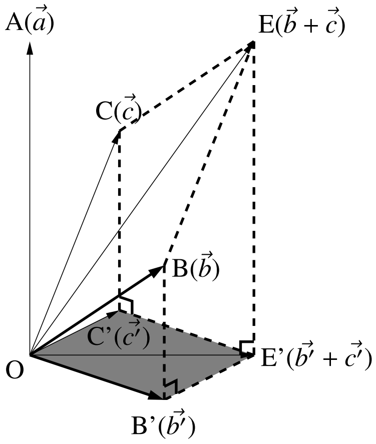
このとき，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ右ねじを回して進む向きと，$\vec{a}$ から $\vec{b'}$ へ右ねじを回して進む向きは等しい．また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積と，$\vec{a}$ と $\vec{b'}$ で張られる平行四辺形の面積も等しい．つまり



$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b'}$$

が成り立つ．

次に，$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$ について考える．

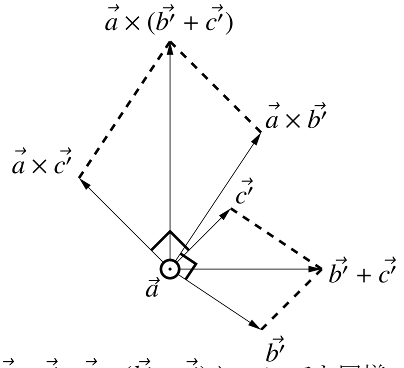


右図のように，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，および $\vec{b}+\vec{c}$ をとる．さらに，$\vec{a}$ に垂直な平面にそれらを正射影した，$\vec{b'}$，$\vec{c'}$，および $(\vec{b}+\vec{c})'$ をとる．ここで，$(\vec{b}+\vec{c})'$ は，$\vec{b'}$ と $\vec{c'}$ の和になっているので，$(\vec{b}+\vec{c})'=\vec{b'}+\vec{c'}$ である．

このとき, さきほどの話から $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})'$，つまり

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times(\vec{b'}+\vec{c'})$$

が成り立つ．



この図を上からのぞき込んでみると，右図のようになる．

このとき，たとえば $\vec{a}\times\vec{b'}$ は，$\vec{a}$ から $\vec{b'}$ に右ねじを回して進む向きをもち，$\vec{a}$ と $\vec{b'}$ で張られる平行四辺形（長方形）の面積を大きさにもつベクトルである．

いいかえると，$\vec{a}\times\vec{b'}$ は，$\vec{b'}$ を $\vec{a}$ に垂直な平面内で反時計回りに 90° 回転させた向きをもち，$|\vec{b'}|$ の $|\vec{a}|$ 倍の大きさをもつベクトルである．これは，$\vec{a}\times\vec{c'}$，$\vec{a}\times(\vec{b'}+\vec{c'})$ についても同様に考えることができ，$\vec{a}\times(\vec{b'}+\vec{c'})$ は，$\vec{a}\times\vec{b'}$ と $\vec{a}\times\vec{c'}$ で張られる平行四辺形の対角線を表すベクトルとなる．

このことから

$$\vec{a}\times(\vec{b'}+\vec{c'})=\vec{a}\times\vec{b'}+\vec{a}\times\vec{c'}$$

が成り立ち，$\vec{a}\times\vec{b'}$，$\vec{a}\times\vec{c'}$ がそれぞれ $\vec{a}\times\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{c}$ と等しくなることに注意すると

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

がいえる．　■

■外積の成分表示

成分表示された 2 つのベクトル，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}$ の外積について考えてみよう．

まず，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は $\vec{e_x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{e_y}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{e_z}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ を用いて

$$\vec{a}=a_x\vec{e_x}+a_y\vec{e_y}+a_z\vec{e_z}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{e_x} + b_y\vec{e_y} + b_z\vec{e_z}$$

と分解できる．

$\vec{e_x} \times \vec{e_x} = \vec{0}$，$\vec{e_y} \times \vec{e_y} = \vec{0}$，$\vec{e_z} \times \vec{e_z} = \vec{0}$ であることに注意して，$\vec{a} \times \vec{b}$ を計算していくと

$$\begin{aligned}
&\vec{a} \times \vec{b} \\
=&(a_x\vec{e_x} + a_y\vec{e_y} + a_z\vec{e_z}) \times (b_x\vec{e_x} + b_y\vec{e_y} + b_z\vec{e_z}) \\
=&a_xb_y(\vec{e_x} \times \vec{e_y}) + a_xb_z(\vec{e_x} \times \vec{e_z}) + a_yb_x(\vec{e_y} \times \vec{e_x}) + a_yb_z(\vec{e_y} \times \vec{e_z}) + a_zb_x(\vec{e_z} \times \vec{e_x}) + a_zb_y(\vec{e_z} \times \vec{e_y}) \\
=&a_xb_y(\vec{e_z}) + a_xb_z(-\vec{e_y}) + a_yb_x(-\vec{e_z}) + a_yb_z(\vec{e_x}) + a_zb_x(\vec{e_y}) + a_zb_y(-\vec{e_x}) \\
=&(a_yb_z - a_zb_y)\vec{e_x} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{e_y} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{e_z}
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_yb_z - a_zb_y \\ a_zb_x - a_xb_z \\ a_xb_y - a_yb_x \end{pmatrix}$$

が成立する．

【例題】外積の成分計算

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする．

(1) $\vec{a} \times \vec{b}$ を成分で表せ．

(2) $\vec{a} \times \vec{b}$ が $\vec{a}$，$\vec{b}$ それぞれと垂直になっていることを，内積を計算することによって確かめよ．

【解答】

(1)

x 成分 : $1 \cdot 3 - (-4) \cdot 5 = 23$

y 成分 : $5 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) = 1$

z 成分 : $(-2) \cdot (-4) - (-1) \cdot 1 = 9$

◀ $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_yb_z - a_zb_y \\ a_zb_x - a_xb_z \\ a_xb_y - a_yb_x \end{pmatrix}$

より，$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{23} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{9} \end{pmatrix}$.

(2) まず

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$$

$$=\begin{pmatrix}23\\1\\9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}=23\cdot(-2)+1\cdot1+9\cdot5=0$$

◀ $\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

となり，確かに $\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{a}$ は垂直となっている．また

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}$$

$$=\begin{pmatrix}23\\1\\9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix}=23\cdot(-1)+1\cdot(-4)+9\cdot3=0$$

◀ $\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

となり，確かに $\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{b}$ も垂直となっている．　■

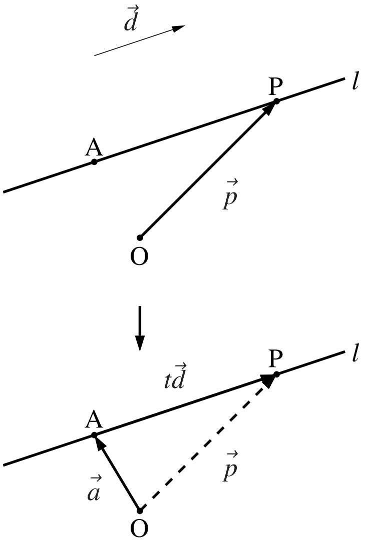
§ 7.5

ベクトル方程式

7.5.1　直線のベクトル方程式

ここでは，点 O に関する位置ベクトルを用いて空間内での直線を表す方法について考えてみよう．

■直線の通る 1 点と方向ベクトルが与えられたとき



空間内の点 A($\vec{a}$) を通り $\vec{0}$ でない $\vec{d}$ に平行な直線を l とする．このとき，この直線上を動くの点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ の表し方は，平面内の場合と全く同様で次のようになる．

まず，点 P が直線 l 上にある限り，必ず $\overrightarrow{\mathrm{AP}} /\!/ \vec{d}$ であるから，空間ベクトルの平行条件 (p.176) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{d}$$

となる実数 t が存在する．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

つまり　$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$　…………………… ①

が成り立つ

次に，座標空間内で成分表示されたベクトルのベクトル方程式を考えてみよう．

点 A(x_0. y_0, z_0) を通り , 方向ベクトルが $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$ である直線上の点 P の座標を P(x, y, z)

とおくと，$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$，$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ であるから，①より

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = x_0 + d_x t \\ y = y_0 + d_y t \\ z = z_0 + d_z t \end{cases}$$

と表せる．これを，$\boldsymbol{t}$ を媒介変数とする直線 l の方程式という．

$d_x \neq 0$ かつ $d_y \neq 0$ かつ $d_y \neq 0$ のとき，この式から媒介変数 t を消去すると，座標空間内の直線の方程式は

$$(t=)\ \frac{x-x_0}{d_x}=\frac{y-y_0}{d_y}=\frac{z-z_0}{d_z}$$

と表せる．

【例題】直線のベクトル方程式 I

以下のそれぞれについて，点 A を通り方向ベクトルを $\vec{d}$ とする直線 l の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ．また，媒介変数を用いない形で直線の方程式を表せ．

(1) A$(2,\ 1,\ -2)$，$\vec{d}=\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$

(2) A$(4,\ 0,\ 1)$，$\vec{d}=\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$

(3) A$(-1,\ 3,\ 0)$，$\vec{d}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

(4) A$(-2,\ 1,\ 0)$，$\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$

【解答】

(1) $\begin{cases}\boldsymbol{x=2+4t}\\\boldsymbol{y=1+3t}\\\boldsymbol{z=-2+t}\end{cases}$

それぞれの式を t について解くと，$t=\dfrac{x-2}{4}$，$t=\dfrac{y-1}{3}$，$t=z+2$ となるから

$$\boldsymbol{\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=z+2}.$$

(2) $\begin{cases}\boldsymbol{x=4-3t}\\\boldsymbol{y=2t}\\\boldsymbol{z=1}\end{cases}$

それぞれの式を t について解くと，$t=\dfrac{x-4}{-3}$，$t=\dfrac{y}{2}$ となり，z は常に 1 であるから

$$\boldsymbol{\frac{x-4}{-3}=\frac{y}{2},\ z=1}.$$

(3) $\begin{cases}\boldsymbol{x=-1+2t}\\\boldsymbol{y=3}\\\boldsymbol{z=-t}\end{cases}$

それぞれの式を t について解くと, $t=\dfrac{x+1}{2}$, $t=\dfrac{z}{-1}$ となり，y は常に 3 であるから

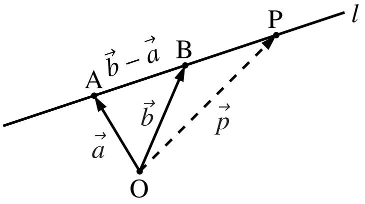
$$\boldsymbol{\frac{x+1}{2}=\frac{z}{-1}\text{，}y=3}$$

(4) $\begin{cases} \boldsymbol{x=-2} \\ \boldsymbol{y=1-3t} \\ \boldsymbol{z=0} \end{cases}$

t が変化すると y はすべての実数をとるが，x は常に -2 であり，z は常に 0 であるから

$x=-2$，$z=0$，y はすべての実数

■直線の通る 2 点が与えられたとき



空間内の異なる 2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を通る直線を l とする．このとき，l は点 $A(\vec{a})$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ の直線であるから，l 上の点 $P(\vec{p})$ に関するベクトル方程式は，p.201 の①より

$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\Leftrightarrow\ \vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

となる．

この式を利用して，座標空間内の 2 点が与えられたときの直線の方程式を求めてみよう．

$\vec{a}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ とし，$\vec{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，②より

$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=(1-t)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=(1-t)x_0+tx_1 \\ y=(1-t)y_0+ty_1 \\ z=(1-t)z_0+ty_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-x_0=t(x_1-x_0) \\ y-y_0=t(y_1-y_0) \\ z-z_0=t(z_1-z_0) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} \\ t=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} \\ t=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0} \end{cases}$$

これより，t を消去して

$$(t=)\ \frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

を得る．

この式は，直線の通る1点 A$(\vec{a})$ を $\vec{a}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$，方向ベクトル $\vec{d}$ を $\vec{d}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}x_1-x_0\\y_1-y_0\\z_1-z_0\end{pmatrix}$ として，①を用いた結果に他ならない．

【例題】2直線の距離

空間内に2直線

$$l:\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{d_l}$$

$$m:\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\vec{d_m}$$

がねじれの位置にあるとする（s，t は任意の実数をとる）．

(1) 直線 l と m の距離 d を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\vec{d_l}\times\vec{d_m}$ を用いて表せ．

(2) 点 A(5, 3, -2)，$\vec{d_l}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$，点 B(2, -1. 6)，$\vec{d_m}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix}$ とするとき直線 l と m の距離を求めよ．

【解答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\vec{d_l}\times\vec{d_m}$ に正射影したベクトル ${}_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\to}(\vec{d_l}\times\vec{d_m})$ は

$${}_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\to}(\vec{d_l}\times\vec{d_m})=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\vec{d_l}\times\vec{d_m})}{\left|\vec{d_l}\times\vec{d_m}\right|^2}\ \vec{d_l}\times\vec{d_m}$$

◀ 空間の正射影ベクトルの内積での表し方 (p.190)

であり，$\left|{}_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\to}(\vec{d_l}\times\vec{d_m})\right|$ が d であるから

$$\begin{aligned}\left|{}_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\to}(\vec{d_l}\times\vec{d_m})\right|&=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\vec{d_l}\times\vec{d_m})\right|}{\left|\vec{d_l}\times\vec{d_m}\right|^2}\ \left|\vec{d_l}\times\vec{d_m}\right|\\&=\boldsymbol{\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\vec{d_l}\times\vec{d_m})\right|}{\left|\vec{d_l}\times\vec{d_m}\right|}}\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}2\\-1\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-4\\8\end{pmatrix}$ であり，$\vec{d_l}\times\vec{d_m}=$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\9\\-3\end{pmatrix}$$ あるから

◀ 外積の成分表示 (p.??)

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\vec{d_l}\times\vec{d_m})\right|}{\left|\vec{d_l}\times\vec{d_m}\right|}$$

$$=\frac{\left|\begin{pmatrix}-3\\-4\\8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\9\\-3\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-6\\9\\-3\end{pmatrix}\right|}$$

$$=\frac{|(-3)\cdot(-6)+(-4)\cdot 9+8\cdot(-3)|}{\sqrt{(-6)^2+9^2+(-3)^2}}$$

$$=\frac{42}{3\sqrt{14}}=\boldsymbol{\sqrt{14}}$$

7.5.2　平面のベクトル方程式

ここでは，点 O に関する位置ベクトルを用いて空間内での平面を表す方法について考えてみよう．

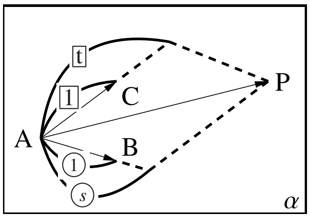
■平面上の 3 点が与えられたとき

ここでは，同一直線上にない空間内の 3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を含む平面 α を表すベクトル方程式を求めてみる．

まず，平面 α 上の点 P($\vec{p}$) に関して $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は，「ベクトルの 1 次結合の定義 (p.134)」で見たように，平面上の 1 次独立な 2 つの $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に分解して

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

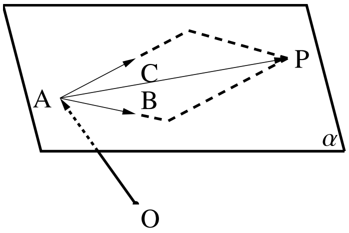
と表すことができる．



これを用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



と表すことができる．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}-\vec{a}$ を用いて整理すると

$$\vec{p}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$$

$$= (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる.

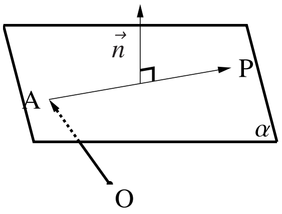
■平面上の 1 点と法線ベクトルが与えられたとき

次に，平面 α 上の 1 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ と，α 法線ベクトル $\vec{n}$ が与えられた場合のベクトル方程式を求めてみる.

平面 α 上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に関して $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は，法線ベクトル $\vec{n}$ と常に垂直になるから

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$



と表すことができる.

次に，座標空間内で成分表示されたベクトルのベクトル方程式をみていこう.

点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，法線ベクトルが $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ である平面 α 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$，$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ であるから，②より

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

となる.

【例題】平面のベクトル方程式

(1) 点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ と平面 $ax + by + cz + d = 0$ の距離を p とすると

$$p = \frac{|\,ax_0 + by_0 + cz_0 + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

であることを証明せよ.

(2) 点 (1, 1, 1) と平面 $3x + 6y + 2z + 3 = 0$ との距離を求めよ.

【解答】

(1) 点 A から平面に下ろした垂線と平面との交点を $\mathrm{P}(x_1,\ x_2.\ x_3)$ とすると，平面の法線ベクトル $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

と $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ のなす角度は 0° もしくは 180° であるので

$$1 = \left| \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}}}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right| = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right| = \frac{|\, a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right| = \frac{|\, ax_0 + by_0 + cz_0 + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

◀ 点 P は平面上にあるので，$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ が成立することを用いた

ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right| = p$ であるので，

$p = \dfrac{|\, ax_0 + by_0 + cz_0 + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ となる． ■

(2) (1) の関係を用いて

$$p = \frac{|\,3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3\,|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}} = \mathbf{2}$$

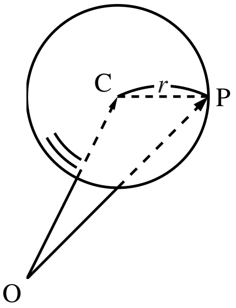
7.5.3 球面のベクトル方程式

ここでは，点 O に関する位置ベクトルを用いて空間内での球面を表す方法について考えてみよう．

■中心と半径が与えられたとき

点 C($\vec{c}$) を中心とする，半径 r の球を S とする．このとき，この球面上を動くの点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ の表し方を考えよう．

点 P が球 S 上にあるとき，常に線分 CP の長さは r，すなわち $\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| = r$ となるから



$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| = r$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p} - \vec{c}\right| = r \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．この①を球 S のベクトル方程式という．

また，座標空間内で $\vec{c}$ が $\vec{c} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ と成分表示された場合，

$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと

$$\left|\vec{p} - \vec{c}\right| = r \Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}\right| = r \Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}\right| = r$$

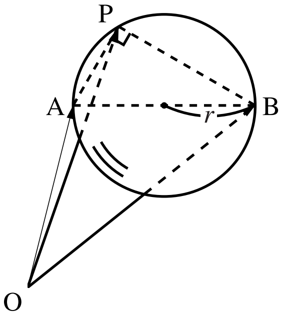
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

となり，これを座標空間における**球の方程式**という．

■直径の両端が与えられたとき

異なる 2 点 A($\vec{a}$) と B($\vec{b}$) を直径の両端とするの球を S とする．このとき，この球面上を動くの点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ の表し方を考えよう．



点 P が球 S 上にあるとき，常に線分 AP と BP は直交，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$ となるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が成り立つ．この②も球 S のベクトル方程式である．

また，座標空間内で $\vec{a}$ が $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ と成分表示された場合，$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - a_x \\ y - a_y \\ z - a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - b_x \\ y - b_y \\ z - b_z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a_x)(x - b_x) + (y - a_y)(y - b_y) + (z - a_z)(z - b_z) = 0$$

となり，これは 2 点 A(a_x, a_y, a_z)，B(b_x, b_y, b_z) を直径とする球の方程式を表す．

【例題】球面のベクトル方程式

以下の条件を満たす球面の方程式を求めよ.

(1) 中心が (1, −2, 3) で，半径が 4

(2) 中心が原点で，点 (6, 3, 2) を通る

(3) 直径の両端が (5, −2, 2)，(1, 6, 4)

【解答】

(1) 中心と半径が与えられたとき円のベクトル方程式 (p.207) より

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p}-\vec{c}\right| = 4$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right| = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2} = 4$$

$$\therefore \ \boldsymbol{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = 16}$$

(2) 中心が原点なので，半径を r とすると

$$x^2+y^2+z^2 = r^2$$

となる．ここで，(6, 3, 2) を通ることより

$$6^2+3^2+2^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 49$$

したがって，求める方程式は $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2 = 49}$ である.

(3) 直径の両端が与えられたときのベクトル方程式 (p.208) より

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-5\\y+2\\z-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y-6\\z-4\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x-1)+(y+2)(y-6)$$
$$+(z-2)(z-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{(x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 21}$$

あとがき

コンピュータがネットワークで繋がれた現在，ソフトウェアの開発において，オープンソースという活動があります．オープンソースとは，ソフトウェアの設計図にあたるソースコードを，インターネットなどを通じて無償で公開し，誰でもそのソフトウェアの開発に参加できるというものです．

ソースコードさえあれば，そのソフトウェアで利用されている技術を容易に転用することが可能となるため，企業などでは自社の開発したソフトウェアのソースコードは極秘とするのが普通です．しかし，オープンソースの考え方は，ソースコードを公開して有用な技術を共有することで，世界中の誰もが自由にソフトウェアの開発に参加することができ，その方が素晴らしいソフトウェアが生まれるはずだという思想に基づいています．

私達FTEXTは，このオープンソースという考え方を，ソースコードに限らず教材や一般のコンテンツ作成に応用する活動を進めています．このFTEXT数学シリーズもそうして作られたものです．

このような手法で教科書を作ることには，従来の教科書作りにはない特徴として，次のことが挙げられます．

まず1点目として，書く側と読む側とに完全に二分化されていた状況が崩れ，全ての人が書くことに参加できる，ということがあります．従来では，教師が生徒の視点を想像して文章を書いていました．しかし，この新しい教科書作りでは，教科書が作られるまさにその過程で，生徒からの質問や指摘が飛び込んできます．さらには，能力とやる気さえあれば生徒自らが教科書を書き進めていくこともできるのです．

次に2点目として，数学の教授法について，全国の先生方がもつコツを取り入れた教科書作りができる，ということがあります．食べ物に好き嫌いがあるように，教師といえども教える部分によって，説明の得意不得意があるものです．この新しい教科書作りでは，全国の先生方の得意な部分を集めていくことができるのです．これは，生徒のためになるだけではなく，他の先生方の教授法のスキルアップにもつながるでしょう．実際このFTEXT数学でも，従来の教科書では見られない最新の教授法を取り入れた編集になっています．

最後に3点目として，この教科書はインターネットを通じて世界中の人に公開されるので，今まで教育業界とは直接関係なかった方々の意見やアイデアも取り入れられる，ということがあります．ある分野での専門家の方々に，教科書で学ぶ数学の応用例などを盛んに紹介していただければ，「数学なんて何の役に立つのかわからない」などという言説を

払拭することができるかもしれません．

普通，教材というものは，ある技術を身に付ける必要のある人が利用するものであり，特化した知識を扱うものですが，“教科書”は日本中のほぼ全員が触れるという特殊な教材です．それゆえ，教科書の役割とは，次代を支える人たちにぜひ学んでおいて欲しい知識について，その時代のスタンダードを担うものであると考えます．工学的技術の進歩により，世界の知識はより細分化の方向に進んでいます．しかし，そのような時代であるからこそ，知識の全体を広く見渡せる教科書の存在が必要なのではないでしょうか．

現在私達は，世界の知恵を集めるという手法を用いて，数学の教科書に限らず，他の分野の教科書についても執筆をはじめようています．さらに今後は，教科書を作るという枠組みを超えて，新しい教材作成のプラットフォームを開発していく予定です．

しかし，これらを実行していくための力がまだまだ私達には足りません．このような活動に興味をもたれた方やご支援いただける方は，ぜひホームページ (http://www.ftext.org/) の方までアクセスください．

索引