2008年度センター本試験・数学IIB

誤植の報告や内容に関する質問や感想をお待ちしております．FTEXT なんでも掲示板 `http://www.ftext.org/modules/mybbs/` までご一報頂けると，今後の活動の励みになります．

【第 1 問】 担当：koichi

【解答】

〔1〕$\log_{10} x$ の真数条件より，$x > \mathbf{0}$ である．次に，（＊）より

$$5^y = 3^{1+\log_{10} x} - 1$$
$$= \mathbf{3} \cdot 3^{\log_{10} x} - 1$$

$5^y > 0$ であるから

$$3z - 1 > 0 \quad \therefore\ z > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

さらに

$$K = \frac{5^y}{3} + 3^{-\log_{10} x}$$
$$= \frac{3 \cdot 3^{\log_{10} x} - 1}{3} + \frac{1}{3^{\log_{10} x}}$$
$$= \frac{3z - 1}{3} + \frac{1}{z}$$
$$= z + \frac{\mathbf{1}}{z} - \frac{1}{\mathbf{3}}$$
$$\geqq 2\sqrt{z \cdot \frac{1}{z}} - \frac{1}{3}$$
$$= \frac{5}{3}$$

◀ 相加・相乗平均の関係より

等号成立は，$z = \dfrac{1}{z}$，すなわち $z = \mathbf{1}$ のとき．このとき，K は最小値 $\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$ をとる．$z = 1$ となるのは，$3^{\log_{10} x} = 1$ より $x = \mathbf{1}$，$5^y = 2$ より $y = \mathbf{\log_5 2}$ である．

〔2〕(1) 点 P と Q の座標は

$\mathrm{P}(\cos a\theta,\ \sin a\theta)$

$\mathrm{Q}\left(2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3}\right),\ 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3}\right)\right)$

とおける．$\theta = \pi$ のとき，$\mathrm{Q}(\sqrt{\mathbf{3}},\ \mathbf{1})$ である．

(2) $a\theta = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3}$ より，$\theta = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{6}a + \mathbf{2}}\pi$ となる．

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{6a+2}\pi$ の範囲を動くとき，点 Q の軌跡が作る扇形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\frac{\theta}{3}$$
$$= \frac{2}{3}\theta = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{6a+2}\pi$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}a+\mathbf{1}}\pi$$

(3) $\mathrm{Q}\left(2\sin\frac{\theta}{3},\ 2\cos\frac{\theta}{3}\right)$ と計算できるので

$$\begin{aligned}
&\mathrm{PQ}^2\\
&= \left(\cos a\theta - 2\sin\frac{\theta}{3}\right)^2 + \left(\sin a\theta - 2\cos\frac{\theta}{3}\right)^2\\
&= 1 + 4 - 4\left(\cos a\theta\sin\frac{\theta}{3} + \sin a\theta\cos\frac{\theta}{3}\right)\\
&= 5 - 4\sin\left(a\theta + \frac{\theta}{3}\right)\\
&= \mathbf{5} - \mathbf{4}\sin\left(\frac{\mathbf{3}a+\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\theta\right)
\end{aligned}$$

◀ 加法定理を使った

(4) $\frac{\mathbf{3}a+\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \frac{1}{2}$ となればいいから，$a = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$ となる．

【第 2 問】 担当：Takashi

【解答】

(1) $$f(x) = \frac{1}{8}x^2$$
$$g(x) = -x^2 + 3ax - 2a^2$$

$C_1 : y = f(x)$ と $C_2 : y = g(x)$ の共有点 P の x 座標は

$$\frac{1}{8}x^2 = -x^2 + 3ax - 2a^2$$

◀ $f(x) = g(x)$

の解である．整理すると

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{9}{8}x^2 - 3ax + 2a^2 \\ &= \frac{1}{8}(9x^2 - 24ax + 16a^2) \\ &= \frac{1}{8}(3x - 4a)^2 \qquad \therefore \quad x = \frac{4}{3}a \end{aligned}$$

よって，点 P の座標は

$$\left(\boldsymbol{\frac{4}{3}}a,\ \boldsymbol{\frac{2}{9}}a^2\right)$$

である．また，

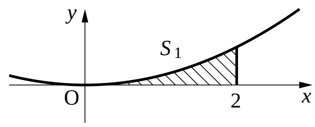
$$f'(x) = \frac{1}{4}x \qquad \therefore \quad f'\left(\frac{4}{3}a\right) = \frac{1}{3}a$$

より，点 P における C_1 の接線の方程式は

$$y = \frac{1}{3}a\left(x - \frac{4}{3}a\right) + \frac{2}{9}a^2$$
$$\therefore \quad y = \boldsymbol{\frac{1}{3}}ax - \boldsymbol{\frac{2}{9}}a^2$$

である．

(2) C_1 と x 軸および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積を S_1 とすると

◀ 

$$S_1 = \int_0^2 \frac{1}{8}x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{24}\right]_0^2 = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

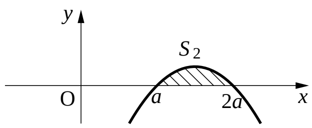
である．また，C_2 と x 軸の交点の x 座標は

$$-x^2 + 3ax - 2a^2 = 0$$
$$-(x - a)(x - 2a) = 0$$
$$\therefore \quad x = \boldsymbol{a,\ 2a}$$

◀ $g(x) = 0$

であり，C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とす

ると



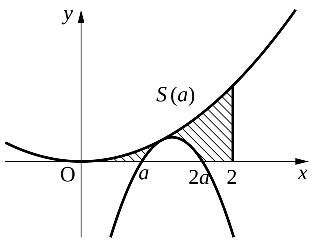
$$\begin{aligned} S_2 &= \int_a^{2a} -(x-a)(x-2a)\,dx \\ &= \frac{(2a-a)^3}{6} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}a^3} \end{aligned}$$

である．

(3) x 軸の正の部分は C_2 により 3 つの部分に分けられる．直線 $x=2$ がどの部分にあるかで場合分けする．

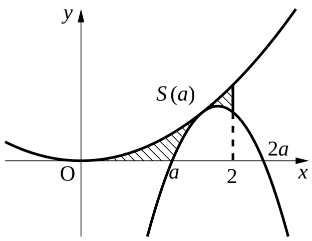
（i）$2a \leqq 2$ すなわち，$0 < a \leqq \mathbf{1}$ のとき

$$S(a) = S_1 - S_2 = -\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{3}$$



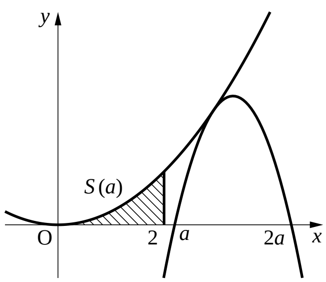
(ii) $a \leqq 2 < 2a$ すなわち，$1 < a \leqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= S_1 - \int_a^2 (-x^2 + 3ax - 2a^2)\,dx \\ &= \frac{1}{3} - \left[-\frac{x^3}{3} + 3a\frac{x^2}{2} - 2a^2x \right]_a^2 \\ &= \frac{1}{3} - \left(-\frac{8}{3} + 6a - 4a^2 \right) \\ &\qquad + \left(-\frac{a^3}{3} + \frac{3}{2}a^3 - 2a^3 \right) \\ &= -\boldsymbol{\frac{5}{6}}a^3 + \mathbf{4}a^2 - \mathbf{6}a + \mathbf{3} \end{aligned}$$



(iii) $2 < a$ のとき

$$S(a) = S_1 = \frac{1}{3}$$



である．

次に，a が $a > 0$ の範囲で動くときの $S(a)$ の変化を調べる．

（i）$0 < a \leqq 1$ のとき，$S(a)$ は単調減少である．

(ii) $1 < a \leqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} S'(a) &= -\frac{5}{2}a^2 + 8a - 6 \\ &= -\frac{1}{2}(5a^2 - 16a + 12) \\ &= -\frac{1}{2}(5a-6)(a-2) \end{aligned}$$

(iii) $2 < a$ のとき，$S(a)$ は一定である．

(i), (ii), (iii) 合わせて, 増減表をかくと下の表になる.

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(a)$		$-$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	0	0
$S(a)$		↘	$\frac{1}{6}$	↘	$\frac{3}{25}$	↗	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

よって, $S(a)$ は $a = \mathbf{\frac{6}{5}}$ で最小値 $\mathbf{\frac{3}{25}}$ をとる.

【第 3 問】 担当：endo

【解答】

(1) a_n は初項 7，公差 -4 の等差数列なので

$$\begin{aligned} a_n &= 7 + (n-1)(-4) \\ &= \mathbf{-4}n + \mathbf{11} \end{aligned}$$

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n\{7 + (-4n + 11)\}}{2} \\ &= \mathbf{-2}n^2 + \mathbf{9}n \end{aligned}$$

◀ 初項 a_1，末項 a_n の等差数列の和 $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

(2) 数列 $\{b_n\}$ は次の条件で与えられているので

$$b_n = pn^2 - qn - r \quad \cdots\cdots ①$$

$$b_{n+1} - 2b_n = -2n^2 + 9n \quad \cdots\cdots ②$$

②に①を代入して

（②の左辺）

$$\begin{aligned} &= p(n+1)^2 - q(n+1) - r - 2pn^2 - qn - r \\ &= (p - 2p)n^2 + (2p - q + 2q)n + (p - q - r + 2r) \\ &= -pn^2 + (2p + q)n + (p - q + r) \end{aligned}$$

②の両辺比較して

$$\begin{cases} -p = -2 \\ 2p + q = 9 \\ p - q + r = 0 \end{cases}$$

よって，$p = \mathbf{2}$，$q = \mathbf{5}$，$r = \mathbf{3}$

つまり，$b_n = 2n^2 - 5n - 3$ で与えられるので，$n = 1$ を代入して，$b_1 = \mathbf{-6}$

$$c_1 = 1 \quad \cdots\cdots ③$$

$$c_{n+1} - 2c_n = -2n^2 + 9n \quad \cdots\cdots ④$$

④ − ② より

$$(c_{n+1} - b_{n+1}) - 2(c_n - b_n) = 0$$

$$d_{n+1} - \mathbf{2}d_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$d_{n+1} = 2d_n$$

数列 $\{d_n\}$ は初項 $d_1 = c_1 - b_1 = 7$，公比 2 の等比数列より

$$d_n = 7 \cdot 2^{n-1}$$

$$c_n - b_n = 7 \cdot 2^{n-1}$$

$$c_n = \mathbf{7} \cdot \mathbf{2}^{n-1} + 2n^2 - 5n - 3$$

数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $\sum_{k=1}^{n} c_k$ は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} c_k &= \sum_{k=1}^{n} (7 \cdot 2^{k-1} + 2k^2 - 5k - 3) \\ &= \frac{7(2^n - 1)}{2-1} + 2 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &\qquad - 5 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - 3n \\ &= \mathbf{7} \cdot \mathbf{2}^n + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} n^3 - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} n^2 - \frac{\mathbf{31}}{\mathbf{6}} n - \mathbf{7}\end{aligned}$$

◀

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

【第 4 問】 担当：kutomi

【解答】

仮定より，$|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}$, $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ である．

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2 = \mathbf{3}$．一方

$$\begin{aligned} 3 = |\vec{a}-\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2 \end{aligned}$$

であるので，$3 = 4 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$．これを解いて $\vec{a}\cdot\vec{b} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$．

同様にして，

$$|\vec{b}-\vec{c}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2 = 2$$

$$\begin{aligned} |\vec{b}-\vec{c}|^2 &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ &= 2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 3 \end{aligned}$$

より，$2 = 5 - 2\vec{b}\cdot\vec{c}$ を解いて $\vec{b}\cdot\vec{c} = \mathbf{\dfrac{3}{2}}$．

$$|\vec{c}-\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = 3$$

$$\begin{aligned} |\vec{c}-\vec{a}|^2 &= |\vec{c}|^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{a} + |\vec{a}|^2 \\ &= 3 - 2\vec{c}\cdot\vec{a} + 2 \end{aligned}$$

より，$3 = 5 - 2\vec{c}\cdot\vec{a}$ を解いて $\vec{c}\cdot\vec{a} = \mathbf{1}$．

(2) P は線分 AB を

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = (1-s) : s \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

と内分するとおく．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b}$ とおけるので

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b} - \vec{c} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

である．つまり

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{a} = 0 &\Leftrightarrow \left\{s\vec{a} + (1-s)\vec{b} - \vec{c}\right\}\cdot\vec{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow s|\vec{a}|^2 + (1-s)\vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{c}\cdot\vec{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2s + \frac{1}{2}(1-s) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4s + 1 - s - 2 = 0 \end{aligned}$$

これを解いて $s = \dfrac{1}{3}$．これを②に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \mathbf{\frac{1}{3}}\vec{a} + \mathbf{\frac{2}{3}}\vec{b} - \vec{c}$$

を得る．また，①に代入して

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1 = 1 : \mathbf{\frac{1}{2}}$$

を得る．また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \vec{b} &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot \vec{b} \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{3}\left|\vec{b}\right|^2 - \vec{c} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times 2 - \frac{3}{2} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2 &= \overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 0 - \overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \vec{c} \\ &= -\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot \vec{c} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{2}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} + \left|\vec{c}\right|^2 \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} + 3 = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| = \sqrt{\dfrac{5}{3}} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{15}}{3}}$.

◀ $\left|\dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b} - \vec{c}\right|^2$ を直接計算してもよい．

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と垂直な辺は

- $\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \vec{a} = 0$ より $\overrightarrow{\mathrm{CP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$
- $\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \vec{b} = 0$ より $\overrightarrow{\mathrm{CP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

である．これより，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$ であるので，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は三角形 **OAB** の各辺と垂直であり，$\boxed{\text{チ}}$ の答えは**3**.

◀ 一般に，ある直線が，空間内の三角形の 2 辺と垂直ならば，他の辺とも垂直である．

三角形 OAB の面積は

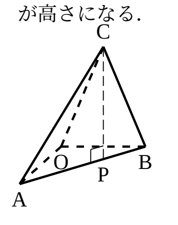
$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 \times 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \mathbf{\frac{\sqrt{15}}{4}}$$

◀ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ として，$\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$ から求めてもよい．
このとき，$\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{1}{2}$ から $\cos\theta = \dfrac{1}{4}$，$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ である．

であり，四面体 OABC の体積は

$$(\text{四面体 OABC}) = \frac{1}{3} \times (\text{三角形 OAB}) \times \left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|$$

◀ 三角形 OAB を底面と見れば，CP が高さになる．



$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{\sqrt{15}}{3} = \mathbf{\frac{5}{12}}$$

で求められる.

変更履歴

- ver2(2008/01/22 22:30) 誤植を修正
- ver1(2008/01/21 01:00) 初版を公開