【第 1 問】

【解答】

〔1〕2 倍角の公式 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ より,

◀ 加法定理より $\cos(\theta+\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ であり，これに $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を使えばよい

$$\cos 2\theta = \mathbf{1 - 2t^2}$$

である. これと $\sin\theta = t$ を $y = f(\theta)$ に代入すると,

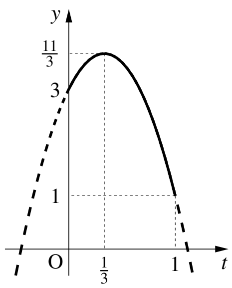
$$\begin{aligned} y &= 3(1-2t^2) + 4t \\ &= \mathbf{-6}t^2 + \mathbf{4}t + \mathbf{3} \end{aligned}$$

これを t について平方完成すれば,

$$\begin{aligned} y &= -6\left(t^2 - \frac{2}{3}t\right) + 3 \\ &= -6\left\{\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right\} + 3 \\ &= -6\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3} \end{aligned}$$

$0^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ より $0 \leqq \sin\theta \leqq 1$, つまり $0 \leqq t \leqq 1$ である.

グラフを描けば右図のようになるので,

◀ 

最大は $t = \dfrac{1}{3}$ のとき, $\mathbf{\dfrac{11}{3}}$. 最小は $t = 1$ のとき, **1**.

次に, 三角関数の加法定理より

$$\begin{aligned} &\sin(\alpha + 30^\circ) \\ &= \sin\alpha\cos 30^\circ + \cos\alpha\sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

よって $f(\alpha) = 3$ $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ のときの, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ を求めればよい. そこで, $f(\alpha) = 3$ のときの $t\ (= \sin\alpha)$ を求める.

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 3 &\iff -6t^2 + 4t + 3 = 3 \\ &\iff t = 0,\ \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ より $0 < \sin\alpha < 1$ なので $t = 0$ は不適. つまり, $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$. また, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ に注意して, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

これらを ① に代入すれば,

$$\sin(\alpha + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \mathbf{\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{6}}$$

〔2〕(1) $\log_x 27$ が定義できるよう, $x > \mathbf{0}$, $x \neq \mathbf{1}$ が満たさ

◀ 対数の底には 1 でない正の数が入らないといけない.

れないといけない.

また, 対数の底の変換公式 $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ より,

$$\log_x 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 x} = \frac{\mathbf{3}}{\log_3 x} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

(2) ② を不等式（∗）に代入して移項すると

$$2\log_3 x - \frac{12}{\log_3 x} - 5 \leqq 0$$

この式の両辺に $\log_3 x$ を掛けて分数を無くしたい. しかし, $\log_3 x$ の正負によって, 場合分けをしないといけない.

$0 < x < 1$ のときは, $\log_3 x < 0$ なので不等号は逆を向き,

$$\mathbf{2}(\log_3 x)^2 - \mathbf{5}\log_3 x - \mathbf{12} \geqq 0 \quad \cdots\cdots \text{③}$$

$t = \log_3 x$ とおいて（つまり $t < 0$）, ③ を解くと

$$2t^2 - 5t - 12 \geqq 0 \iff (2t+3)(t-4) \geqq 0$$
$$\iff t \leqq -\frac{3}{2},\quad 4 \leqq t$$

$t < 0$ より $t \leqq -\dfrac{3}{2}$ のみ答えとして適する. これを x の式に直せば

$$\log_3 x \leqq -\frac{3}{2} \iff 0 < x \leqq 3^{-\frac{3}{2}}$$
$$\iff 0 < x \leqq \frac{1}{(\sqrt{3})^3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

◀ 底は 3 なので, 不等号の向きは変わらない.

よって, $0 < x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{9}$ が答えとなる.

$1 < x$ のときは, $0 < \log_3 x$ なので不等号はそのままで,

$$2(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x - 12 \leqq 0 \quad \cdots\cdots \text{④}$$

$t = \log_3 x$ とおいて（つまり $0 < t$）, ④ を解くと

$$2t^2 - 5t - 12 \leqq 0 \iff -\frac{3}{2} \leqq t \leqq 4$$

$0 < t$ より $0 < t \leqq 4$ のみ答えとして適する. これ

を x の式に直せば

$$\begin{aligned} 0 < \log_3 x \leqq 4 &\iff 3^0 < x \leqq 3^4 \\ &\iff 1 < x \leqq 81 \end{aligned}$$

よって, $1 < x \leqq 81$ が答えとなる.

以上をまとめると, 不等式（∗）の解は $0 < x \leqq \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{9}}$, $1 < x \leqq \mathbf{81}$ である.

【第 2 問】

【解答】

(1) 点 $(t,\ t^2)$ における C_1 の接線の方程式を求める.

C_1 の接線の傾きは

$$y' = (x^2)' = 2x$$

となる．点 $(t,\ t^2)$ を通るので，傾きは $2t$ となる.

よって，点 $(t,\ t^2)$ を通り，傾きが $2t$ となる接線の方程式は

$$y = 2tx - t^2 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

一方，C_2 の接線も同様にして求める.

C_2 上の点 $(s,\ s^2 - 4as + 4a(a+1))$ を通る接線の傾きは，$y' = 2x - 4a$ より，$2s - 4a$ となる.

よって，$(s,\ s^2 - 4as + 4a(a+1))$ を通る接線の方程式は，$y = ax + b$ に各数字を代入して

$$\begin{aligned} &s^2 - 4as + 4a(a+1) = (2s - 4a)s + b \\ \Leftrightarrow\ & b = -s^2 + 4a(a+)1 \end{aligned}$$

なので，$y = (2s - 4a)x - s^2 + 4a(a+1)$ …… ② である.

C_1 と C_2 の接線は共通接線なので，①, ② の x 係数と 0 次の項を比較して

$$\begin{cases} 2t = 2s - 4a \\ -t^2 = -s^2 + 4a(a+1) \end{cases}$$

これを解いて

$$\begin{cases} s = 2a + 1 \\ t = 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots \quad ③$$

よって，① と ① が等しくなる，すなわち共通接線と

なるときの t の値は 1 となる．
したがって，直線 l の方程式は，$t = 1$ を ① に代入して

$$y = 2x - 1 \qquad \cdots\cdots ④$$

また，l と C_2 との接点の x 座標は，③ より，$s = 2a+1$ である．
また，y 座標は，④ に $s = 2a + 1$ を x に代入して，$y = 4a + 1$ である．
よって，接点の座標は $(2a + 1,\ 4a + 1)$ である．

(2) C_1 と C_2 の交点 P は，C_2 に C_1 を代入して

$$x^2 = x^2 - 4ax + 4a(a + 1)$$
$$\Leftrightarrow\ x = a + 1$$

これを C_1 に代入して，$y = (a + 1)^2$ となる．よって，P の座標は $(a + 1,\ (a + 1)^2)$ である．
直線 m の傾きは，直線 l と等しいので 2 となる．よって，傾きが 2 で，$(a + 1,\ (a + 1)^2)$ を通る直線の方程式は，$y = ax + b$ に各数値を代入して

$$(a + 1)^2 = 2(a + 1) + b$$
$$\Leftrightarrow\ b = a^2 - 1$$

よって，$y = 2x + a^2 - 1$ である．
直線 m と y 軸の交点においては $x = 0$ なので，$y = a^2 - 1$ が成立．ここで，$y > 0$ となる a の値の範囲は

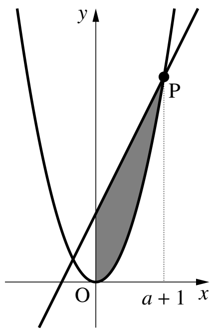
$$a > 1 \text{ または } a < -1$$

a は正の実数なので $a > 1$ である．

(3)

$$\begin{cases} y = x^2 \ \ (x \geqq 0) \\ y = 2x + a^2 - 1 \ \ (a > 1) \\ y \text{ 軸} \end{cases}$$

で囲まれた図形は右図の斜線部のようになるので，その面積は



$$\int_0^{a+1} (2x + a^2 - 1 - x^2)\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + a^2x - x \right]_0^{a+1}$$

$$= -\frac{1}{3}(a+1)^3 + (a+1)^2 + a^2(a+1) - (a+1)$$
$$= (a+1)\left(-\frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}a - \frac{1}{3} + a^2 + a\right)$$
$$= \frac{1}{3}(a+1)(2a^2+a+1)$$
$$= \frac{1}{3}(a+1)^2(2a-1)$$

【第 3 問】

【解答】

(1) $\{x_n\}$ が等差数列であることから,

$$2b = a + c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

が成り立ち, $\{y_n\}$ が等比数列であることから,

$$a^2 = bc \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ②$$

が成り立つ.

この２つの式から,

$$a^2 = (2b-a)b$$
$$\Leftrightarrow\ 2b^2 - ab - a^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ (2b+a)(b-a) = 0$$
$$\therefore\ b = \mathbf{-\frac{1}{2}}a$$

◀ $b = a$ は, a, b, c が相異なる実数であることと反する

また, この結果を ① に代入すると, $c = \mathbf{-2}a$ となる.

等差数列の公差は,

$$b - a = -\frac{1}{2}a - a = \mathbf{-\frac{3}{2}}a$$

となる.

(2) 等比数列の公比は,

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{-2a} = \mathbf{-\frac{1}{2}}$$

となる.

$\{y_n\}$ の初項から第 8 項までの和は,

$$\sum_{k=1}^{8} y_k = \sum_{k=1}^{8}\left\{-2a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}$$
$$= \frac{-2a\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1+\frac{1}{2}}$$
$$= \mathbf{-\frac{85}{64}}\,a$$

となる．

(3) 階差数列 $\{w_n\}$ の第 1 項，第 2 項を調べると，それぞれ $-\frac{3}{2}a$，$3a$ となる．

これより，$\{w_n\}$ の公差は，

$$3a-\left(-\frac{3}{2}a\right)=\mathbf{\frac{9}{2}}a$$

となる．

$\{w_n\}$ の一般項は，

$$\begin{aligned} w_n &= -\frac{3}{2}a+(n-1)\cdot\frac{9}{2}a \\ &= \mathbf{\frac{9n-12}{2}}a \end{aligned}$$

であり，$\{z_n\}$ の一般項は，$\{w_n\}$ の一般項は，

$$\begin{aligned} z_n &= -\frac{1}{2}a+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{9k-12}{2}a \\ &= \boldsymbol{\frac{a}{4}\left(9n^2-33n+22\right)} \end{aligned}$$

と表される．

【第 4 問】

【解答】

(1)

$$\begin{aligned} &\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=1^2 \\ \Leftrightarrow\ &\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=1 \\ \therefore\ &\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{\frac{-1}{2}} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} &\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|^2 \\ &=4\left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2 \\ &=4-2+1=3 \end{aligned}$$

よって，$\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=\mathbf{\sqrt{3}}$ となる．さらに

$$\begin{aligned} &(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b} \\ &=2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2 \\ &=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0 \end{aligned}$$

より，$2\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{b}$ のなす角は $\mathbf{90}^\circ$ となる．

(2) $\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおく（s，t は適当な実数）．

条件より，$\vec{c}$ は $\vec{a}$ に垂直なので

$$(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{a}=0$$
$$\Leftrightarrow\ s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$
$$\therefore\ s-\frac{t}{2}=0$$
$$\Leftrightarrow\ t=2s \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

また，$|\vec{c}|=1$ なので

$$|s\vec{a}+t\vec{b}|=1^2$$
$$\Leftrightarrow\ s^2|\vec{a}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=1$$
$$\therefore\ s^2+2st\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+t^2=1$$
$$\Leftrightarrow\ s^2-2st+t^2=1 \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

①を②にもちいて

$$s^2-2s^2+4s^2=1$$
$$\Leftrightarrow\ 3s^2=1$$
$$\Leftrightarrow\ s=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

これらを，①に代入して，$t=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$，まとめると

$$(s,\ t)=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\ \text{（複合同順）}$$

さらに，条件より $\vec{b}\cdot\vec{c}>0$ であるから

$$\vec{b}\cdot\left(s\vec{a}+t\vec{b}\right)>0$$
$$\Leftrightarrow\ s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2$$
$$\therefore\ s\left(-\frac{1}{2}\right)+t>0$$
$$\Leftrightarrow\ 2t>s$$

これを満たす s，t は $(s,\ t)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)$ なので

$$\vec{c}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{a}+2\vec{b})}$$

(3) まず，$0\leqq\vec{p}\cdot\vec{a}\leqq 1$ より

$$0\leqq(x\vec{a}+y\vec{c})\cdot\vec{a}\leqq 1$$
$$\therefore\ \boldsymbol{0\leqq x\leqq 1} \quad \cdots\cdots\cdots \text{③}$$

次に，$0 \leqq \vec{p}\cdot\vec{b} \leqq 1$ より

$$0 \leqq (x\vec{a}+y\vec{b})\cdot\vec{c} \leqq 1$$
$$\therefore\ 0 \leqq -\frac{x}{2}+y\cos 30^\circ \leqq 1$$
$$\Leftrightarrow\ 0 \leqq -\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y \leqq 1$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x \leqq \sqrt{3}y \leqq x+2} \quad \cdots\cdots ④$$

ここで

$$\begin{aligned}&\vec{p}\cdot\vec{c}\\ &= (x\vec{a}+y\vec{c})\cdot\vec{c}\\ &= x\vec{a}\cdot\vec{c}+y|\vec{c}|^2\\ &= y\end{aligned}$$

x, y が③, ④の範囲を動くとき, y の最大値は $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ ($x=1$) である.

これより

$$\begin{aligned}\vec{p} &= 1\cdot\vec{a}+\sqrt{3}\cdot\vec{c}\\ &= \vec{a}+\sqrt{3}\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{a}+2\vec{b})\right\}\\ &= \boldsymbol{2\vec{a}+2\vec{b}}\end{aligned}$$

【第 5 問】【第 6 問】は省略

【第 7 問】

【解答】

(1) OB = 1，∠BOA = 60° であるから

$$\beta = \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}$$

である.

点 Q(z_1) は，P(z) を O ののまわりに **60°** だけ回転した点であるから

$$z_1 = \beta z \quad \cdots\cdots ①$$

◀ β をかけることは, 原点中心に 60° 回転させる働きがある

$\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ を表す複素数 $z_2 - z$ は，$\overrightarrow{\mathrm{RA}}$ を表す複素数 $1-z$ を **60°** 回転したものだから

$$z_2 - z = \beta(1-\beta)$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{z_2 = z+\beta(1-\beta)} \quad \cdots\cdots ②$$

$w = \dfrac{z_1 - \beta}{z_2 - \beta}$ において，①と②より

$$\begin{aligned} w &= \frac{\beta z - \beta}{z + \beta(1 - z) - \beta} \\ &= \frac{\beta z - \beta}{z - \beta z} \\ &= \frac{\beta}{1 - \beta} \cdot \frac{z - 1}{z} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{1 - \beta} &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \\ &= \frac{1 - 3 + 2\sqrt{3}i}{4} \\ &= \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{4} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

より，$w = \boldsymbol{\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}} \cdot \dfrac{z - 1}{z}$ となる．

(2) ここで，$v = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とおくと，w が純虚数すなわち，$w = -\overline{w}$ のとき

$$\begin{aligned} & v \cdot \frac{z - 1}{z} = -\overline{v} \cdot \frac{\overline{z} - 1}{\overline{z}} \\ \Leftrightarrow\ & v\overline{z}(z - 1) = -\overline{v}z(\overline{z} - 1) \\ \Leftrightarrow\ & (v + \overline{v})z\overline{z} - v\overline{z} - \overline{v}z = 0 \quad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

ここで，$v + \overline{v} = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1$ より③は

$$\begin{aligned} & z\overline{z} + v\overline{z} + \overline{v}z = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (z + v)(\overline{z} + \overline{v}) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & (z + v)(\overline{z + v}) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & |z + v|^2 = 1 \\ \therefore\ & |z - (-v)| = 1 \end{aligned}$$

◀ 一般の複素数 z に関して $z\overline{z} = |z|^2$

これより，点 $\mathrm{P}(z)$ は，$-v = \boldsymbol{\dfrac{1 - \sqrt{3}i}{2}}$ を表す点を中心とする，半径 **1** の円周上にある．

【第 8 問】

【解答】

(1) $Y=4$ となる確率は，さいころの目が 4 回とも同じになる確率であるから

$$P(Y=4)=\frac{6}{6^4}=\frac{1}{216}$$

(2) $Y=2$ となる確率は，ある数が 2 回，他のある数が 2 回出る確率であるから

$$P(Y=2)=\frac{{}_4C_2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5}{6^4}=\frac{5}{72}$$

(3) $P(Y=k)>0$ となる k は，1，2，4 の 3 通り．よって

$$P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=4)=\mathrm{U}\text{（全集合）}$$

であるので，$Y=1$ となる確率は

$$\begin{aligned}1-(P(Y=4)+P(Y=2))&=1-\left(\frac{1}{216}+\frac{5}{72}\right)\\&=\frac{25}{27}\end{aligned}$$

これより，Y の平均は

$$E(Y)=1\cdot\frac{25}{27}+2\cdot\frac{5}{72}+4\cdot\frac{1}{216}=\frac{13}{12}$$

Y の分散は

$$\begin{aligned}V(Y)&=E(Y^2)-E(Y)^2\\&=1^2\cdot\frac{25}{27}+2^2\cdot\frac{5}{72}+4^2\cdot\frac{1}{216}-\left(\frac{13}{12}\right)^2\\&=\frac{5}{48}\end{aligned}$$

(4) $X\geqq 2$ となる条件のもとで，$Y=1$ となるのは，

(i) ある数が 3 回でて，他のある数が 1 回でる場合

(ii) ある数が 2 回でて，他のある数がそれぞれ 1 回ずつでる場合

の 2 通りである．(i) は，1 回だけでる数が何回目の試行にでるかで 4 通り，3 回でる数が何であるかで 6 通り，1 回だけでる数が何で あるかで 5 通り考えられるので，この場合は

$$4\cdot 6\cdot 5=120\text{（通り）}$$

である．(ii) は，2 回でる数がどことどこに出るかで ${}_4C_2=6$ 通り，その数が何かで 6 通り，1 回ずつでる

数が何と何かで $5 \cdot 4 = 20$ 通りであるので，この場合は

$$6 \cdot 6 \cdot 20 = 720 \text{（通り）}$$

である．

$X \geqq 2$ となる場合は，すべての試行で違う数がでる場合の背反事象であるから

$$6^4 - 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 936 \text{（通り）}$$

よって，求める確率は

$$\frac{120 + 720}{936} = \frac{35}{39}$$