【第 1 問】

【解答】

〔1〕 (1) $\triangle$OAC に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= 1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos(180-2\theta)\\ &= \mathbf{2}+2\cos 2\theta\\ &= 2+2(2\cos^2\theta-1)\\ &= \mathbf{4}\cos^2\theta\end{aligned}$$

◀ 倍角の公式

BC も同様に，$\triangle$OBC に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-2\cdot\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\angle\mathrm{BOC}\\ &= 1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos\theta\\ &= \mathbf{2}-2\cos\theta\\ &= \mathbf{4}\sin^2\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}d &= \mathrm{AB}+\mathrm{AC}\\ &= \sqrt{4\cos^2\theta}+\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\\ &= \mathbf{2}|\cos\theta|+\mathbf{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\end{aligned}$$

◀ $0^\circ \leqq \frac{\theta}{2} \leqq 90^\circ$ より，$\sin\frac{\theta}{2} \geqq 0$

(2) $t=\sin\frac{\theta}{2}$ とおく．

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき, $0^\circ \leqq \frac{\theta}{2} \leqq 45^\circ$ であるから

$$0 \leqq t \leqq \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$$

である．このとき

$$\begin{aligned}d &= 2\cos\theta+2\sin\frac{\theta}{2}\\ &= 2\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+2\sin\frac{\theta}{2}\\ &= -\mathbf{4}t^2+\mathbf{2}t+2\\ &= -4\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{4} \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

である．

また，$90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$45^\circ \leqq \frac{\theta}{2} \leqq 90^\circ$ なので

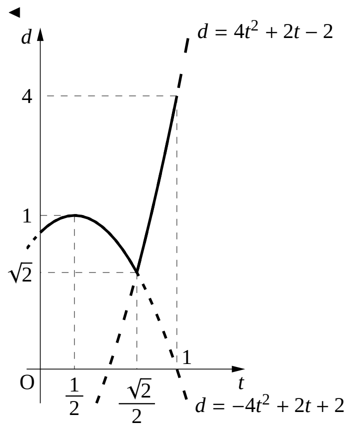
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq t \leqq 1$$

である．このとき

$$\begin{aligned} d &= -2\cos\theta + 2\sin\frac{\theta}{2} \\ &= -2\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 2\frac{\theta}{2} \\ &= 4t^2 + 2t + 2 \\ &= 4\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{4} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{aligned}$$

である．

①，② より，d を t についての関数とみなし，グラフを描くと右のようになる．



これより，d は $t = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ をとる．このときの θ の値は

$$t = \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

より，$\theta = \mathbf{90}^\circ$

また，d は $t = \mathbf{1}$ のとき最大値 $\mathbf{4}$ をとる．このときの θ の値は

$$t = \sin\frac{\theta}{2} = 1$$

より，$\theta = \mathbf{180}^\circ$

〔2〕 (1) $2^x = \left(\frac{5}{2}\right)^y$ に，2 を底とする対数をとって

$$\begin{aligned} x &= \log_2\left(\frac{5}{2}\right)^y \\ &= y(\log_2 5 - \log_2 2) \\ &= y(\log_2 \mathbf{5} - \mathbf{1}) \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} b - a &= \frac{5}{2}y - 2y(\log_2 5 - 1) \\ &= y\left(\frac{5}{2} - 2\log_2 5 + 2\right) \\ &= y\left(\frac{\mathbf{9}}{2} - 2\log_2 5\right) \end{aligned}$$

(2) $2^x = 3^z$ に，2 を底とする対数をとると，$x = \log_2 3^z = z\log_2 \mathbf{3}$ であるから

$$c - a = 3z - 2x$$

$$= z(3 - 2\log_2 3)$$
$$= z(\log_2 2^3 - \log_2 3^2) < 0$$

◀ $z > 0$

これより，a と c を比べると $\boldsymbol{a}$ の方が大きい.

(3) $z = \log_3 \left(\dfrac{5}{2}\right)^y = y\log_3 \dfrac{5}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} b - c &= \frac{5}{2}y - 3z \\ &= \frac{5}{2}y - 3y\log_3 \frac{5}{2} \\ &= \frac{y}{2}\left(5 - 6\log_3 \frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{y}{2}\left\{\log_3 3^5 - \log_3 \left(\frac{5}{2}\right)^6\right\} < 0 \end{aligned}$$

◀ $3^5 < \left(\dfrac{5}{2}\right)^6$

以上より，a，b，c の間には大小関係

$$\boldsymbol{b < c < a}$$

が成り立つことがわかる.

【第 2 問】

【解答】

(1) C の頂点 P の座標は

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2ax - a^3 - 2a^2 \\ &= (x+a)^2 - a^3 - 3a^2 \end{aligned}$$

より

$$(\boldsymbol{-a},\ -a^{\boldsymbol{3}} - \boldsymbol{3}a^2)$$

である．P(X, Y) とおくと

$$\begin{cases} X = -a \\ Y = -a^3 - 3a^2 \end{cases}$$

であり，これらから定数 a を消去すると

$$\begin{aligned} Y &= -(-X)^3 - 3(-X)^2 \\ &= X^3 - 3X^2 \end{aligned}$$

となる. 定数 a がなんであれ X と Y はこの関係を維持するので，頂点 P は

$$y = x^{\boldsymbol{3}} - \boldsymbol{3}x^2$$

のグラフ上にある.

(2) $Y = -a^3 - 3a^2$ の両辺を a で微分して

$$\begin{aligned} Y' &= -3a^2 - 6a \\ &= -3a(a+2) \end{aligned}$$

より，$-3 \leqq a < 1$ の範囲での Y の増減は

a	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
Y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
Y	0	↗	-4	↘	0	↗	(-4)

となる.

よって，Y が最大となるのは $a = \mathbf{0}$ と $a = \mathbf{-3}$ のときであり，最小となるのは $a = \mathbf{-2}$ のときである.

(3) C_1, C_2, C_3 は，C の式に $a = 0,\ -3,\ -2$ をそれぞれ代入して

$$C_1 : y = x^2$$
$$C_2 : y = x^2 - \boldsymbol{6}x + \boldsymbol{9}$$
$$C_3 : y = x^2 - \boldsymbol{4}x$$

となる．これより，C_1 と C_2 の交点の x 座標は

$$x^2 = x^2 - 6x + 9$$

をみたす x であるから，$x = \mathbf{\dfrac{3}{2}}$

C_1 と C_3 の交点の x 座標は

$$x^2 = x^2 - 4x$$

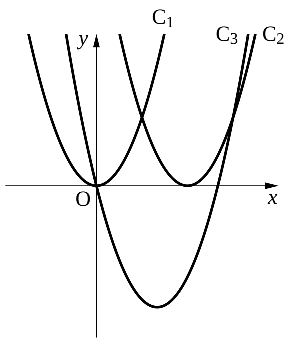
をみたす x であるから，$x = \mathbf{0}$

C_2 と C_3 の交点の x 座標は

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 4x$$

をみたす x であるから，$x = \mathbf{\dfrac{9}{2}}$

(4) C_1，C_2，C_3 を，それぞれの頂点と交点に注意しながら図示すると右のようになる．



これより，C_1，C_2，C_3 の位置関係を示す最も適当なものは **3**

また，三つの放物線 C_1，C_2，C_3 で囲まれた図形の面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{3}{2}} \{x^2 - (x^2 - 4x)\}\,dx \\
&\quad + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}} \{x^2 - 6x + 9 - (x^2 - 4x)\}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}} 4x\,dx + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}} (-2x + 9)\,dx \\
&= \Big[2x^2\Big]_0^{\frac{3}{2}} + \Big[-x^2 + 9x\Big]_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}} \\
&= 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left\{-\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 9 \cdot \frac{9}{2}\right\} \\
&\quad - \left\{-\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 9 \cdot \frac{3}{2}\right\} \\
&= \mathbf{\frac{27}{2}}
\end{aligned}$$

【第 3 問】

【解答】

$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ とおく.

A_1 が B_1C_1 の中点であるので, $A_1C_1 = |y| = y$, $A_1B_1 = |w| = -w$ より, $w = \mathbf{-}y$ となる.

B_2 が A_2C_2 の中点であるので, 先ほどと同様にして

$$
\begin{aligned}
& A_2C_2 = 2A_2B_2 \\
\Leftrightarrow\ & z = \mathbf{2}x
\end{aligned}
$$

である.

D が AB の中点であり, C_3 が A_3B_3 の中点なので, D, C, C_3 は一直線上にある. よって, $\overrightarrow{CD}$ と $\overrightarrow{PQ}$ は垂直なので, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PQ} = \mathbf{0}$ である.

また

$$
\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \\
&= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\overrightarrow{AB} - \mathbf{2}\overrightarrow{AC}\right)
\end{aligned}
$$

であるから, $w = -y$, $z = 2x$ より

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{CD} &= \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3x \\ 3y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PQ} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3x \\ 3y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(12x + 9y)
\end{aligned}
$$

である. ここで, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ より

$$
\begin{aligned}
& 12x + 9y = 0 \\
\Leftrightarrow\ & y = \frac{\mathbf{-4}}{\mathbf{3}}x
\end{aligned}
$$

となる. これより, $\overrightarrow{AB} = x\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-4}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = x\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} \end{pmatrix}$ となる.

したがって

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = x^2\left\{1^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2\right\} = \frac{25}{9}x^2$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = x^2\left\{2^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right\} = \frac{52}{9}x^2$$

であるから，$AB = \dfrac{5}{3}x$，$AC = \dfrac{2\sqrt{13}}{3}x$ であり，$AC = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{13}}{5}}AB$ である．

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= x^2\begin{pmatrix}1\\ -\frac{4}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}\\ &= x^2\left(2 - \frac{16}{9}\right) = \frac{2}{9}x^2\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\cos\angle BAC &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}\\ &= \frac{\frac{2}{9}x^2}{\frac{5}{3}x\cdot\frac{2\sqrt{10}}{5}} = \frac{1}{5\sqrt{13}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{13}}{65}}\end{aligned}$$

【第 4 問】

【解答】

$\gamma-\alpha$ は $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を，$\beta-\alpha$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を表す．また，$\triangle\mathrm{ABC}$ は直角二等辺三角形なので

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\mathbf{90}^\circ$$
$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\mathbf{1}$$

である．

ここで，$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=90^\circ$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}&=1(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)\\&=i\end{aligned}\qquad\cdots\cdots ④$$

であるので

$$\begin{aligned}④\iff&\gamma-\alpha=i(\beta-\alpha)\\\iff&-\alpha+i\beta+(1-i)\gamma=0\end{aligned}\qquad\cdots\cdots ⑤$$

となる．ここで，⑤ $\times\, i+$ ① より

$$\begin{aligned}&(1-i)\alpha+(2+i)\gamma=0\\\iff&\gamma=-\frac{2+i}{1-i}\alpha\\\iff&\gamma=\frac{\mathbf{-1-3}\boldsymbol{i}}{\mathbf{2}}\alpha\end{aligned}\qquad\cdots\cdots ⑥$$

となる．また，⑥ を ① に代入すると

$$\begin{aligned}\beta&=-\alpha-\gamma\\&=-\alpha-\frac{-1-3i}{2}\alpha=\frac{\mathbf{-1+3}\boldsymbol{i}}{\mathbf{2}}\alpha\end{aligned}\qquad\cdots\cdots ⑦$$

となる．

さらに，②，③ に ⑥，⑦ を代入すると

$$\begin{aligned}p&=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\\&=\frac{-1+3i}{2}\alpha^2+\left(\frac{-1+3i}{2}\right)\left(\frac{-1-3i}{2}\right)\alpha^2+\frac{-1-3i}{2}\alpha^2\\&=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\alpha^{\mathbf{2}}\\q&=\alpha\beta\gamma\\&=\left(\frac{-1+3i}{2}\right)\left(\frac{-1-3i}{2}\right)\alpha^3\\&=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\alpha^{\mathbf{3}}\end{aligned}$$

となる．よって，p と q は

$$\begin{cases} p^3 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 \alpha^6 \\ q^2 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \alpha^6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \left(\frac{2}{3}\right)^3 p^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 q^2$$

$$\Leftrightarrow \ \mathbf{50}p^{\mathbf{3}} = \mathbf{27}q^{\mathbf{2}}$$

を満たさなければならない．

ABCD は正方形なので

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \beta - \alpha + \gamma - \alpha = -3\alpha$$

である．よって，D を表す複素数は $-3\alpha + \alpha = \mathbf{-2}\alpha$ である．

【第 5 問】

【解答】

事象 A の起こる確率は $\dfrac{1}{3}$ である.

(1) 「$X = a+1$ となる確率」とは，事象 A が 1 回起こったあと，2 回目が起こらずサイコロを 5 回振り終わる確率を指す．つまり，5 回の試行で事象 A が 1 回，余事象 $\overline{A}$ が 4 回起こる確率なので

$$ {}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \mathbf{\frac{80}{243}} $$

(2) 「ちょうど 4 回目でゲームが終了する確率」とは，3 回目までのどこかで 1 回事象 A が起こり，4 回目で事象 A が起こる確率であるから

$$ \left\{{}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}\left(\frac{1}{3}\right) = \mathbf{\frac{4}{27}} $$

終了する時点が 4 回目または 5 回目となる確率は，その余事象を考えて

◀ 終了する時点が 5 回目となる確率を求めてもよいが，余事象を求める方が楽.

(i) 1 回目で終了する確率は 0

(ii) 2 回目で終了する確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$

(iii) 3 回目で終了する確率は

$$ \left\{{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\right\}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27} $$

より，

$$ 1-\left(0+\frac{1}{9}+\frac{4}{27}\right) = \mathbf{\frac{20}{27}} $$

(3) 3 回目までに一度も事象 A が起こらない確率は

$$ \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \mathbf{\frac{8}{27}} $$

「3 回目までに一度も事象 A が起こらないとき，$X > a$ となる条件付き確率」とは，4 回目と 5 回目で少なくとも 1 回は事象 A が起こる確率を指す．そこで余事象「4 回目と 5 回目で 1 回も事象 A が出ない確率」を考えて

$$ 1-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \mathbf{\frac{5}{9}} $$

(4) X の値は次の 3 つが考えられる.

(i) $a-m$ となる場合

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$$

(ii) $a+1$ となる場合

(1) より，$\dfrac{80}{243}$

(iii) $a+3$ となる場合

(i) と (ii) の余事象であるから，

$$1-\left(\frac{32}{243}+\frac{80}{243}\right)=\frac{131}{243}$$

これより，X の平均 (期待値) は

$$\begin{aligned}E(X)&=(a-m)\frac{32}{243}+(a+1)\frac{80}{243}+(a+3)\frac{131}{243}\\&=a+\frac{\mathbf{473-32}m}{243}\end{aligned}$$

$E(X)>a$ となるような最大の自然数 m は

$$\begin{aligned}a+\frac{473-32m}{243}&>a\\32m&<473\\m&<14.7\cdots\end{aligned}$$

より，**14**