## 【第 1 問】

### 【解答】

1 まず

$$\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x) \leqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

まず，真数条件から，$x-1>0$ かつ $3-x>0$，つまり

$$1<x<3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を満たさなくてはいけない．① から

$$① \Leftrightarrow \log_2(x-1)-\log_2(3-x) \leqq 0$$
$$\Leftrightarrow \log_2(x-1) \leqq \log_2(3-x)$$
$$\Leftrightarrow x-1 \leqq 3-x$$

◀ 底の変換公式

したがって，$x \leqq 2$ である．
これと ② より，$x$ の範囲は

$$\mathbf{1}<x \leqq \mathbf{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$X=2^x$ とおく

◀ $0 \leqq X$

$$y=4^x-6\cdot 2^x+10$$
$$=X^2-6X+10$$
$$=(X-\mathbf{3})^2+\mathbf{1}$$

また，⑤ より $\mathbf{2}<X \leqq \mathbf{4}$ である．
よって，$X=4$ のとき，つまり $x=\mathbf{2}$ のとき最大値 **2** をとり，$X=3$ のとき，つまり $x=\log_2 \mathbf{3}$ のとき最小値 **1** をとる．

2 (1)

$$f(\theta)=\sin(\theta-a)-\sin\theta$$

$f(\theta)=0$ のとき，$\sin(\theta-a)=\sin\theta$ である．条件の $0 \leqq \theta \leqq 180^\circ$ かつ $0^\circ<a<180^\circ$ をみたすのは

$$\theta-a=180^\circ-\theta$$
$$\Leftrightarrow \theta=\mathbf{90^\circ}+\frac{a}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

である．また，$\sin(\theta-a)=\dfrac{1}{2}$ ならば

$$\sin(\theta-a)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(90^\circ - \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

◀ ④ を使った.

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \mathbf{120^\circ}$$

◀ $0^\circ < a < 180^\circ$

(2) $a = 120^\circ$ とすると

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sin(\theta - 120^\circ) - \sin\theta \\ &= -2\cos(\theta - 60^\circ)\sin 60^\circ \\ &= -\sqrt{3}\cos(\theta - 60^\circ) \end{aligned}$$

◀ 和積の公式

$0 \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$-\dfrac{1}{2} \leqq \cos(\theta - 60^\circ) \leqq 1$ である．よって，$\theta = \mathbf{180^\circ}$ のとき最大値 $\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$ をとり，$\theta = \mathbf{60^\circ}$ のとき最小値は $\boldsymbol{-\sqrt{3}}$ をとる．

## 【第 2 問】

### 【解答】

(1) 直線 $l$ の傾きは，$\dfrac{4a^2-(a+1)^2}{2a-(a+1)}=3a+1$ なので，$l$ の方程式は

$$y=(3a+1)(x-2a)+4a^2$$
$$=(\mathbf{3}a+\mathbf{1})x-\mathbf{2}a^2-\mathbf{2}a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

であり，同様に直線 $m$ の方程式は

$$y=(3b+1)x-2b^2-2b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である．①，② を連立させて解くと

$$x=\frac{2}{3}(a+b+1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$
$$y=(3a+1)\cdot\frac{2}{3}(a+b+1)-2a^2-2a$$
$$=2ab+\frac{2}{3}(a+b+1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

である．つまり，$l$，$m$ の交点 T の座標は，$\left(\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}(a+b+1),\ \mathbf{2}ab+\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}(a+b+1)\right)$ である．
よって，$b$ を $a$ に限りなく近づけるとき，③，④ に $b=a$ を代入すると，$x=\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3}$，$y=2a^2+\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3}$ となる．
つまり，T は限りなく点 $\mathrm{U}\left(\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}a+\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\ \mathbf{2}a^2+\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}a+\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)$ に近づく．

(2) (1) より
$$\begin{cases} x=\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3} \\ y=2a^2+\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3} \end{cases}$$
であるから，この 2 式から $a$ を消去すると，

$$y=2\left(\frac{3x-2}{4}\right)^2+x=\frac{9x^2-4x+4}{8} \quad \cdots\cdots ⑤$$

となる．よって，点 U は放物線 $D: y=\dfrac{\mathbf{9}x^2-\mathbf{4}x+\mathbf{4}}{\mathbf{8}}$ 上にある．
このとき，$y'=\dfrac{9}{4}x-\dfrac{1}{2}$ から，点 U における放物線 $D$ の接線の傾きは

$$y'=\frac{9}{4}\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{2}=3a+1$$

放物線 $D$ の接戦で原点を通るものは，$y=mx$ と ⑤

が接すればよいから，$\dfrac{9x^2-4x+4}{8} = mx$ すなわち $9x^2-4(am+1)+4=0$ は重解をもつ．

よって，判別式 $D$ を考えて

$$
\begin{aligned}
& D/4 = 2(2m+1)^2 - 9\cdot 4 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & m = 1,\ -2
\end{aligned}
$$

である．以上から，放物線 $D$ の接戦で原点を通るものは $y=x$ と $y=\mathbf{-2}x$ である

(3) 放物線 $C$，$D$ の共有点の $x$ 座標は

$$
\begin{aligned}
& x^2 = \frac{9x^2-4x+4}{8} \\
\Leftrightarrow\ & (x-2)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 2
\end{aligned}
$$

であるので，共有点の座標は $(\mathbf{2},\ \mathbf{4})$ である．

放物線 $C$，$D$ および $y$ 軸で囲まれた部分の面積は

$$
\begin{aligned}
& \int_0^2 \left(\frac{9x^2-4x+4}{8} - x^2\right) dx \\
=\ & \int_0^2 \frac{1}{8}(x-2)^2\,dx \\
=\ & \left[\frac{1}{24}(x-2)^3\right]_0^2 \\
=\ & \mathbf{\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

## 【第 3 問】

**【解答】**

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{\mathrm{u}} = t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\t\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP'}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP'}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + t'\vec{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix}0\\5\\-2\end{pmatrix} + t'\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t'\\5\\-2+t'\end{pmatrix}$$

これより

$$\overrightarrow{\mathrm{PP'}} = \overrightarrow{\mathrm{AP'}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix}t'-t\\5-t\\-2+t'\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ③$$

PP′ は $m$ と垂直なので

$$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\cdot\vec{\mathrm{v}} = 0$$
$$\Leftrightarrow (t'-t)\cdot 1 + (5-t)\cdot 0 + (-2t+t')\cdot 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2t' - t - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow t' = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}t \quad \cdots\cdots ④$$

である．ここで，③ に ④ を代入すると，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}} = \begin{pmatrix}\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}t\\ \mathbf{5-}\boldsymbol{t}\\ \mathbf{-1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}t\end{pmatrix}$ となる．

同様に QQ′ と $l$ は垂直なので, $s' = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}s$ ⋯⋯ ⑤

である．以上から

$$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ'}} - (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}}) = s'\vec{\mathrm{u}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} - s\vec{\mathrm{v}} = s'\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix} - s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s'-s\\s'-5\\2-s\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \frac{1}{2}s \\ \frac{-5}{2} + \frac{1}{2}s \\ \mathbf{2} - s \end{pmatrix}$$

◀ ⑤ を使った.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ'}} = (s' - t)\overrightarrow{\mathrm{u}}$, $\overrightarrow{\mathrm{QP'}} = (t' - s)\overrightarrow{\mathrm{v}}$ であるから, $\mathrm{PQ'}=\mathrm{QP'}$ すなわち $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{QP'}}\right|$ となるのは,
$\left|(s' - t)\overrightarrow{\mathrm{u}}\right| = \left|(t' - s)\overrightarrow{\mathrm{v}}\right|$ …… ⑥ が成り立てばよい.
ここで, $\left|\overrightarrow{\mathrm{u}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{v}}\right|$ だから

$$
\begin{aligned}
⑥ &\Leftrightarrow |s' - t| = |t' - s| \\
&\Leftrightarrow s' - t = \pm(t' - s) \\
&\Leftrightarrow \frac{5}{2} + \frac{1}{2}s - t = \pm\left(1 + \frac{1}{2}t - s\right) \\
&\Leftrightarrow s = \mathbf{7} - t,\ \mathbf{-1} + t
\end{aligned}
$$

◀ ④, ⑤ を使った.

(3) $s = 7 - t$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{2}t \\ 1 - \frac{1}{2}t \\ -5 + t \end{pmatrix}$$

である. $\mathrm{PP'}$ と $\mathrm{QQ'}$ が垂直なので, $\mathrm{PP'} \cdot \mathrm{QQ'} = 0$ であるから

$$
\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{1}{2}t\right)\left(-1 + \frac{1}{2}t\right) + (5 - t)\left(1 - \frac{1}{2}t\right) \\
&\quad + \left(-1 + \frac{1}{2}t\right)(-5 + t) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 3t^2 - 24t + 36 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (t - 6)(t - 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & t = \mathbf{2},\ \mathbf{6}
\end{aligned}
$$

## 【第 4 問】

**【解答】**

(1)

$$bz^3+(1-b)z^2=az+1-a$$
$$\Leftrightarrow\ (z-\mathbf{1})(\boldsymbol{b}z^2+z+1-\boldsymbol{a})=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$z\neq 1$ より

$$① \Leftrightarrow\ bz^2+z+1-a=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

である．ところで，$z$ は実数ではないので，$z$ が ② の解なら，$\bar{z}$ も ② の解である．

◀ 実数係数の方程式が実数でない解 $z$ を持つなら，$\bar{z}$ も解である．

よって，解と係数の関係より

$$\begin{cases} z+\bar{z}=-\dfrac{1}{b} \\ z\bar{z}=\dfrac{1-a}{b} \end{cases}$$

であるから，$z=x+yi$ とすると

◀ $\bar{z}=x-yi$

$$\begin{cases} 2x=-\dfrac{1}{\boldsymbol{b}} \\ x^2+y^2=\dfrac{1-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \end{cases}$$

である．つまり，$a=\mathbf{1}+\dfrac{x^2+y^2}{2x}$，$b=-\dfrac{1}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}$ である．

ここで，$0<a<1$，$0<b<1$ より

$$\begin{aligned} 0<a<1 &\Leftrightarrow 0<-\frac{1}{2x}<1 \\ &\Leftrightarrow -1<\frac{1}{2x}<0 \\ &\Leftrightarrow x<\frac{-1}{2} \quad \cdots\cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0<b<1 &\Leftrightarrow 0<1+\frac{x^2+y^2}{2x}<1 \\ &\Leftrightarrow -1<\frac{x^2+y^2}{2x}<0 \\ &\Leftrightarrow -2x>x^2+y^2>0 \\ &\Leftrightarrow 0<(x+1)^2+y^2<1 \end{aligned}$$

◀ ③ を使った．

であるから, 求める条件は $x<\dfrac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$ かつ $(x+\mathbf{1})^2+y^2<\mathbf{1}$ である．

(2) $z$ を極形式で表して，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする．$A_0$，$A_1$，$A_2$，$A_3$ を原点の周りに $\theta$ 回転させ，原点からの距離を r 倍にしたもの点が，$A_1$，$A_2$，$A_3$，$A_4$ だから，線分 $A_3A_4$ と線分 $A_1A_2$ は両端以外で**必ず交わる**．

## 【第 5 問】

**【解答】**

(1) オモテ

| B / A | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |

ウラ

| B / A | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

表より，目の和が 3 の倍数になるのはオモテの場合 **12** 通り，ウラの場合 **12** 通り．よって，2 つのサイコロの目の和が 3 の倍数になる確率は

$$\frac{24}{72} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

表より，求める条件つき確立は

$$\frac{15}{24} = \mathbf{\frac{5}{8}}$$

(2) 確率変数をオモテのとき $Y$，ウラのとき $Z$ とすると

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) \\ &\quad + \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) \\ &= \frac{42}{6} = \mathbf{7} \end{aligned}$$

である．また

$$E(Y_A) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$$
$$E(Y_B) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$$
$$E(Y_A^2) = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = \frac{91}{6}$$

$$E(Y_B^2) = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6}$$

であるから，分散の公式より

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(Y_A + Y_B) \\ &= E(Y_A^2) - \{E(Y_A)\}^2 + E(Y_B^2) - \{E(Y_B)\}^2 \\ &= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &= \mathbf{\frac{35}{6}} \end{aligned}$$

である．ウラのときは，オモテのときと同様にして

$$E(Z) = \mathbf{7}$$
$$V(Z) = \mathbf{\frac{35}{6}}$$

である．

よって，$Y$ と $Z$ の平均と分散が一致するので

$$E(X) = \mathbf{7}$$
$$V(X) = \mathbf{\frac{35}{6}}$$