【第 1 問】

【解答】

〔1〕 (1) 1 次関数のグラフを考える.

$x \geqq 0$ のとき, 常にグラフが x 軸の上にあるには, まず，切片が正，つまり $\boldsymbol{B > 0}$ が必要.

次に，もしグラフの傾きが負なら x 軸との交点を持ってしまうので，傾きは常に 0 以上でなくてはいけない．よって，$\boldsymbol{A \geqq 0}$ も必要.

(2)

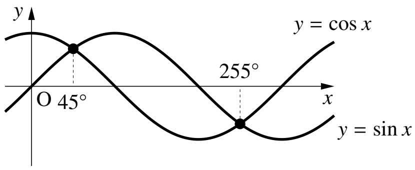
$$\text{①} \Leftrightarrow (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha)x + \sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow (-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)x + \sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha > 0$$

◀ 加法定理

よって，(1) より $-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha$ を A，$\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha$ を B として考えると

$$\begin{cases} \sin \boldsymbol{2}\alpha \geqq \cos \boldsymbol{2}\alpha & \cdots\cdots \text{②} \\ \sin^{\boldsymbol{2}}\alpha > \sin\alpha\cos\alpha & \cdots\cdots \text{③} \end{cases}$$



を満たすことが条件となる．よって，$0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ$ に注意して

◀

$$\text{②} \Rightarrow 45^\circ \leqq 2\alpha \leqq 225^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{45}{2}^\circ \leqq \alpha \leqq \frac{225}{2}^\circ \quad \cdots\cdots \text{④}$$

$$\text{③} \Leftrightarrow \sin\alpha(\sin\alpha - \cos\alpha) > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\alpha\sin(\alpha - 45^\circ) > 0$$

◀ 3 角関数の合成

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 45^\circ - \cos(2\alpha - 45^\circ)}{\sqrt{2}} > 0$$

◀ 積和の公式

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos(2\alpha - 45^\circ) > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2\alpha - 45^\circ) < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 45^\circ < 2\alpha - 45^\circ < 315^\circ$$

$$\Leftrightarrow 90^\circ < 2\alpha < 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow 45^\circ < \alpha < 180^\circ \quad \cdots\cdots \text{⑤}$$

よって，④，⑤ より

$$\boldsymbol{45}^\circ < \alpha \leqq \boldsymbol{\frac{225}{2}}^\circ$$

〔2〕 (1)

$$\log_9 x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{\log_3 x}{\log_3 9} - \frac{3}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \ \log_3 x = 3$$
$$\Leftrightarrow \ x = \mathbf{27}$$

◀ 底の変換公式

(2) $\log_3 x = t$ とおくと

$$a = t - \frac{7}{2}$$
$$b = t - \frac{5}{2}$$
$$c = \frac{t}{2} - \frac{5}{2}$$
$$d = \frac{t}{2} - \frac{3}{2}$$

となる．また

$a = 0$ のとき，$t = \dfrac{7}{2}$，つまり，$x = 27\sqrt{3}$
$b = 0$ のとき，$t = \dfrac{5}{2}$，つまり，$x = 9\sqrt{3}$
$c = 0$ のとき，$t = 5$，つまり，$x = 243$
$d = 0$ のとき，$t = 3$，つまり，$x = 27$

である．よって，a，b，c，d すべてが負になるには

$$0 < x < \mathbf{9\sqrt{3}}$$

が必要.
また，2 つが正で，2 つが負になるには

$$\mathbf{27} < x < \mathbf{27\sqrt{3}}$$

が必要.
さらに，すべてが正になるには

$$\mathbf{243} < x$$

が必要.
(3) $27 < x < 27\sqrt{3}$，つまり，$3 < t < \dfrac{7}{2}$ のとき

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2} < a < 0 \\ \dfrac{1}{2} < b < 1 \\ -1 < c < -\dfrac{3}{4} \\ 0 < d < \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

であるので，$\boldsymbol{c < a < b < d}$ である.

【第 2 問】

【解答】

(1) $0 \leqq x \leqq 3$ のとき

$$g(x) = \int_0^x t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x = \mathbf{\frac{1}{2}x^2}$$

$x \geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^3 t\,dt + \int_3^x (-3t+12)\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^3 + \left[-\frac{3}{2}t^2 + 12t\right]_3^x \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + \mathbf{12}x - \mathbf{18} \end{aligned}$$

(2) $0 < a < 3$ なので，$g'(a) = \boldsymbol{a}$ である．よって，l の方程式は

$$y = a(x-a) + \frac{1}{2}a^2 = \boldsymbol{a}x - \mathbf{\frac{1}{2}}a^2 \quad \cdots\cdots ①$$

(3) ① に，$y = 0$ を代入すると $x = \dfrac{1}{2}a$ となるので，Q の座標は $\left(\mathbf{\dfrac{1}{2}}a,\ 0\right)$ となる．

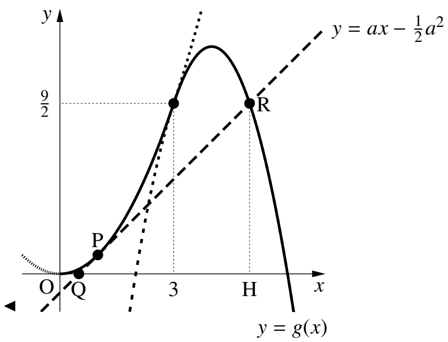
l と C の P 以外の交点は $x > 3$ にあるので

$$\begin{aligned} &-\frac{3}{2}x^2 + 12x - 18 = ax - \frac{1}{2}a^2 \\ \Leftrightarrow\ &-\frac{3}{2}x^2 + x(12-a) - 18 + \frac{1}{2}a^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &3x^2 - 2x(12-a) + 36 - a^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &(3x-6-a)(x-6+a) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &x = \frac{6+a}{3},\ 6-a \end{aligned}$$

ただし，$0 < a < 3$ より，$2 < \dfrac{6+a}{3} < 3$ なので，R の座標は $\left(\mathbf{6} - a,\ \mathbf{6}a - \mathbf{\dfrac{3}{2}}a^2\right)$ である．

(4) $y = g(x)$ のグラフは右欄外の図のようになるので

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left(6 - a - \frac{1}{2}a\right)\left(6a - \frac{3}{2}a^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(6 - \frac{3}{2}a\right)\left(6a - \frac{3}{2}a^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}a^3 - 18a^2 + 36a\right) \\ &= \mathbf{\frac{9}{8}}a^3 - \mathbf{9}a^2 + \mathbf{18}a \end{aligned}$$



また

$$
\begin{aligned}
S' &= \frac{27}{8}a^2 - 18a + 18 \\
&= \frac{1}{8}(27a^2 - 18 \cdot 8a + 18 \cdot 8) \\
&= \frac{9}{8}(3a^2 - 16a + 16) \\
&= \frac{9}{8}(a-4)(3a-4)
\end{aligned}
$$

である．よって，$S' = 0$ のとき，$a = \dfrac{4}{3}$ なので増減表は

◀ $0 < a < 3$

a	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	3
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	極大	↘	

となる．よって，S は $a = \boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$ のとき，最大値をとる．

【第 3 問】

【解答】

(1)

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}$$
$$= \vec{x} + \vec{y} + a\vec{z} - a\vec{x}$$
$$= (\mathbf{1} - \boldsymbol{a})\vec{x} + \vec{y} + \boldsymbol{a}\vec{z}$$
$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP}$$
$$= (1 - a)\vec{y} + \vec{z} - a\vec{x}$$
$$= \boldsymbol{-a}\,\vec{x} + (1 - a)\vec{y} + \vec{z}$$

となる．したがって，$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{z} \cdot \vec{x} = 0$ を用いると

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = (1 - a)^2 + 1^2 + a^2$$
$$= 2a^2 - 2a + 2$$
$$= \mathbf{2}(a^2 - a + \mathbf{1})$$
$$\left|\overrightarrow{PR}\right|^2 = a^2 + (1 - a)^2 + 1^2$$
$$= 2(a^2 - a + 1)$$

なので，$\left|\overrightarrow{PQ}\right| : \left|\overrightarrow{PR}\right| = 1 : \mathbf{1}$ である．また

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = (1 - a)(-a) + 1 \cdot (1 - a) + a \cdot 1$$
$$= a^2 - a + 1$$

であるので，$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角を θ とすると

$$a^2 - a + 1 = \left(\sqrt{2(a^2 - a + 1)}\right)^2 \cos\theta$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

よって，$\theta = \mathbf{60}^\circ$ となる．

(2)

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD}$$
$$= \frac{a\vec{x} + \vec{x} + \vec{y} + a\vec{z} + (1 - a)\vec{y} + \vec{z}}{3} - \vec{y}$$
$$= \frac{(a + 1)\vec{x} + (-a + 2)\vec{y} + (a + 1)\vec{z} - 3\vec{y}}{3}$$
$$= \frac{\boldsymbol{a} + \mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\vec{x} - \vec{y} + \vec{z})$$

C′S : SD′ $= p : 1 - p$ $(0 < p < 1)$ すると SQ = SR

より

$$\begin{aligned}
& (1-a^2)+p^2=(1-p)^2+a^2 \\
\Leftrightarrow\ & 1-2a+a^2+p^2=1-2p+p^2+a^2 \\
\Leftrightarrow\ & a=p
\end{aligned}$$

となる．よって，$\overrightarrow{\mathrm{C'S}}=\boldsymbol{a}\overrightarrow{\mathrm{C'D}}$ となり

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{SD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AS}} \\
&= \vec{y}-\left\{\vec{z}+\vec{y}+(1-a)\vec{x}\right\} \\
&= (\boldsymbol{a}-\mathbf{1})\vec{x}-\vec{z}
\end{aligned}$$

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{SG}}=\overrightarrow{\mathrm{DG}}-\overrightarrow{\mathrm{DS}}=\overrightarrow{\mathrm{DG}}+\overrightarrow{\mathrm{SD}}$$

より

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{SG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DG}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{DG}}+\overrightarrow{\mathrm{SD}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{DG}} \\
&= \left|\overrightarrow{\mathrm{DG}}\right|^2+\overrightarrow{\mathrm{SD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DG}} \\
&= \frac{3(a+1)^2}{9}+\frac{(a+1)(a-1)}{3}-\frac{a+1}{3} \\
&= \frac{2a^2+a-1}{3} \\
&= \frac{(2a-1)(a+1)}{3}
\end{aligned}$$

◀ $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{SG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ は垂直なので $\overrightarrow{\mathrm{SG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DG}}=0$ であり，$0<a<1$ であるので，$a=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ となる．

また

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{SR}}=-\frac{1}{2}\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{y} \\
&\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=\frac{1}{2}\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{z} \\
&\overrightarrow{\mathrm{SR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4} \\
&\left|\overrightarrow{\mathrm{SR}}\right|^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2} \\
&\left|\overrightarrow{\mathrm{SQ}}\right|^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

であるので，$\overrightarrow{\mathrm{SQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ のなす角を φ とすると

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{\mathrm{SR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{SR}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{SQ}}\right|}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

となる．よって，$\varphi = \mathbf{120}^\circ$ である．

【第 4 問】

【解答】

(1)

$$z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= 2\{\cos(\theta + 30^\circ) + i\sin(\theta + 30^\circ)\}$$

◀ ド・モアブルの定理

よって，$|z_0| = 2$，$\arg z_0 = \mathbf{30}^\circ + \theta$ である．

(2)

$$z_1 = \frac{4\{(1-\sin\theta) + i\cos\theta\}}{(1-\sin\theta) + i\cos\theta} \cdot \frac{(1-\sin\theta) + i\cos\theta}{(1-\sin\theta) + i\cos\theta}$$
$$= \frac{4\{(1-\sin\theta) + i\cos\theta\}^2}{(1-\sin\theta)^2 - i^2\cos^2\theta}$$
$$= \frac{4\left\{(1-\sin\theta)^2 + 2i\cos\theta(1-\sin\theta) - \cos^2\theta\right\}}{2 - 2\sin\theta}$$
$$= 2(1 - \sin\theta + 2i\cos\theta - 1 - \sin\theta)$$
$$= \mathbf{4}(-\sin\theta + i\cos\theta)$$
$$= 4\{\cos(\theta + 90^\circ) + i\sin(\theta + 90^\circ)\}$$

◀ $\cos^2\theta = (1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$

よって，$|z_1| = 4$，$\arg z_1 = \mathbf{90}^\circ + \theta$ である．

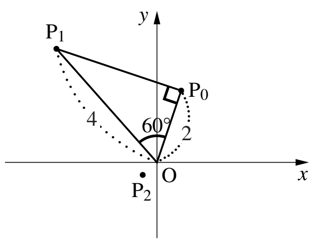
(3) $\left|\dfrac{z_1}{z_0}\right| = \mathbf{2}$ である．また

$$\arg\frac{z_1}{z_0} = 90^\circ + \theta - (30^\circ + \theta) = \mathbf{60}^\circ$$

である．

P_1，P_2 は複素数平面では右欄外の図のようになるので

◀



$$P_0P_1 = \mathbf{2\sqrt{3}}$$

(4) 円に内接する四角形の対角の和は 180° なので，$\angle OP_2P_1 = 180^\circ - \angle OP_0P_1 = 90^\circ$ である．よって，$z_1 - z_2$ は $\overrightarrow{P_2P_1}$ を表すので

$$\arg\frac{z_1 - z_2}{-z_2} = \mathbf{-90}^\circ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

となる．よって

$$\frac{z_1 - z_2}{-z_2} = -\frac{z_1}{z_2} + 1$$
$$= \frac{z_1^2}{2} + 1$$
$$= \frac{4^2\{\cos(180^\circ + 2\theta) + i\sin(180^\circ + 2\theta)\}}{2} + 1$$
$$= -8\cos 2\theta - 8i\sin 2\theta + 1$$

◀ $z_2 = -\dfrac{2}{z_1}$ を使った

ここで，① より $\dfrac{z_1 - z_2}{-z_2}$ は純虚数なので

$$\mathbf{8}\cos 2\theta - \mathbf{1} = 0$$

◀ 純虚数 ⇔ 実部が 0

$$\Leftrightarrow\ 8(1 - 2\sin^2\theta) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 16\sin^2\theta = 7$$

$$\Leftrightarrow\ \sin\theta = \frac{\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{4}}$$

◀ $0^\circ < \theta < 90^\circ$

【第 5 問】

【解答】

(1)

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{1}{8} + 5\cdot\frac{1}{8} + 6\cdot\frac{1}{8} + 7\cdot\frac{1}{8} + 8\cdot\frac{1}{8}$$
$$= \frac{1}{8}(1+2+3+4+5+6+7+8) = \mathbf{\frac{9}{2}}$$
$$E(X^2) = \frac{1}{8}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2)$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{8(8+1)(8\cdot 2+1)}{6} = \frac{51}{2}$$
$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$
$$= \frac{51}{2} - \frac{81}{4} = \mathbf{\frac{21}{4}} \quad \cdots\cdots ①$$

(2) (1) と同様に考えて

$$N = \frac{1}{8}(p+2p+3p+4p+5p+6p+7p+8p) + q - 100$$
$$= \mathbf{\frac{9}{2}}p + q - \mathbf{100} \quad \cdots\cdots ②$$

(3) ② より

$$\frac{9}{2}p + q - 100 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}p + q = 100 \quad \cdots\cdots ③$$

ここで，右辺は整数なので左辺も整数．よって，p は偶数である．

$p = 2m$ $(m = 1,\ 2,\ \cdots)$ とおくと

$$③ \Leftrightarrow 9m + q = 100$$

となる．q は正の整数なので，$m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10,\ 11$ である．よって $N = 0$ を満たす $p,\ q$ の組の総数は **11** である．

その中で，p の最小値は **2**，最大値は 22 である．

(4) ① より Y の分散は

$$V(Y) = \mathbf{\frac{21}{4}}p^2$$

である．

$V(Y)$ は p の 2 次関数なので，$p = \mathbf{2}$ のとき最小値をとり，$C = \frac{21}{4}\cdot 2^2 = \mathbf{12}$ となる．