2008年度センター本試験・数学IA

誤植の報告や内容に関する質問や感想をお待ちしております．FTEXT なんでも掲示板 `http://www.ftext.org/modules/mybbs/` までご一報頂けると，今後の活動の励みになります．

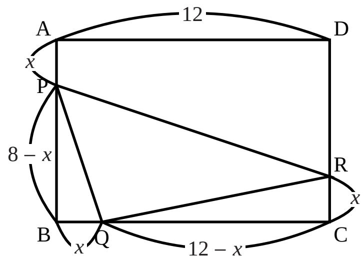
【第 1 問】 担当:koichi

【解答】

〔1〕右図より，台形 PBCR の面積は

$$(\mathrm{PB}+\mathrm{CR})\times\mathrm{BC}\times\frac{1}{2}$$
$$=\{(8-x)+x\}\times 12\times\frac{1}{2}$$
$$=\mathbf{48}$$

◀



また，△PQR の面積 S は

$$S = 台形\ \mathrm{PBCR}-\triangle\mathrm{PBQ}-\triangle\mathrm{QCR}$$
$$=48-\frac{1}{2}\cdot x\cdot(8-x)-\frac{1}{2}\cdot(12-x)\cdot x$$
$$=48-\frac{x}{2}(8-x+12-x)$$
$$=x^2-\mathbf{10}x+\mathbf{48}$$

◀ $-\frac{x}{2}$ でまとめた

$S<24$ となるのは

$$x^2-10x+48<24$$
$$\Leftrightarrow\ x^2-10x+24<0$$
$$\Leftrightarrow\ (x-4)(x-6)<0$$
$$\Leftrightarrow\ \mathbf{4}<x<\mathbf{6}$$

〔2〕 1) ◆ $p\Rightarrow r$

は $m=1$，$n=1$ が反例となり偽である．

◆ $p\Leftarrow r$

適当な整数 M，N をもちいて，$m=2M$，$n=4N$ とおけるので

$$m+n=2M+4N=2(M+2N)=2\times(\text{整数})$$

となり，$m+n$ は 2 で割り切れる．つまり真である．

以上より，$p\Leftarrow r$ のみが真とわかるので，正解は **1** である．

◀ $r\Rightarrow p$ が真ならば「p は r であるための必要条件」というのが定義。

2) ◆ $\overline{p}\Rightarrow\overline{r}$

の対偶である $r\Rightarrow p$ は，1) より真である．

◀ 対偶の真偽は、元の命題の真偽と一致する。

◆ $\overline{p}\Leftarrow\overline{r}$

の対偶である $r\Leftarrow p$ は，1) より偽である．

以上より，$\overline{p}\Rightarrow\overline{r}$ のみが真とわかるので，正解は **2** である．

3) ◆「p かつ q」$\Rightarrow r$

適当な整数 M，N をもちいて，$m+n=2M$，$n=4N$ とおけるので

$$m = 2M - n = 2M - 4N = 2(M-2N)$$
$$= 2 \times (\text{整数})$$

となり，m は 2 で割り切れる．つまり真である．

◆「p かつ q」$\Leftarrow r$

$p \Leftarrow r$ は 1) で真であり，$q \Leftarrow r$ も当然真なので，全体として真である．

◀「p かつ q」$\Leftarrow r$ が真とは、「r ならば p」も「r ならば q」も真ということ。

以上より，「p かつ q」$\Leftrightarrow r$ が真とわかるので，正解は0である．

4) ◆「p または q」$\Rightarrow r$

は $m=1$，$n=1$ が反例となり偽である．

◆「p または q」$\Leftarrow r$

3) より当然真となる．

◀ 仮定 r のもとで、p と q の少なくとも一方が真であればよいため。

以上より，「p または q」$\Leftarrow r$ のみが真とわかるので，正解は1である．

【第 2 問】 担当:ohta

【解答】

式

$$y = ax^2 - bx - a + b \quad \cdots\cdots ①$$

に $x = -2,\ y = 6$ を代入すると

$$\begin{aligned} & 6 = a(-2)^2 - b(-2) - a + b \\ \Leftrightarrow\ & 6 = 3a + 3b \\ \Leftrightarrow\ & 2 = a + b \\ \therefore\ & b = -a + \mathbf{2} \end{aligned}$$

よって，①式は,

$$y = ax^2 - (-a+2)x - 2a + 2 \quad \cdots\cdots ②$$

となる．$a \neq 0$ なので平方完成できて,

$$\begin{aligned} y &= a\left(x - \frac{-a+2}{2a}\right)^2 - a\cdot\left(\frac{-a+2}{2a}\right)^2 - 2a + 2 \\ &= a\left(x - \frac{-a+2}{2a}\right)^2 - \frac{(3a-2)^2}{4a} \end{aligned}$$

◀ 平方完成の途中式を丁寧に書くと

$$\begin{aligned} y &= ax^2 - (-a+2)x - 2a + 2 \\ &= a\left(x^2 - \frac{-a+2}{a}x\right) - 2a + 2 \\ &= a\left\{\left(x - \frac{-a+2}{2a}\right)^2 - \left(\frac{-a+2}{2a}\right)^2\right\} - 2a + 2 \\ &= a\left(x - \frac{-a+2}{2a}\right)^2 - a\cdot\left(\frac{-a+2}{2a}\right)^2 - 2a + 2 \end{aligned}$$

となる。

となる．従って頂点の座標は

$$\left(\frac{-a+\mathbf{2}}{\mathbf{2}a},\ \frac{-(\mathbf{3}a-\mathbf{2})^2}{\mathbf{4}a}\right) \quad \cdots\cdots ③$$

となる．

ここで，頂点の y 座標が -2 ならば、③の y 座標の式より，a は

$$\begin{aligned} & -\frac{(3a-2)^2}{4a} = -2 \\ \Leftrightarrow\ & (3a-2)^2 = 8a \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{9}a^2 - \mathbf{20}a + \mathbf{4} = 0 \end{aligned}$$

をみたす．上の a に関する 2 次方程式を解いて

◀
$$\begin{array}{ccccc} 9 & & -2 & \longrightarrow & -2 \\ 1 & & -2 & \longrightarrow & -18 \\ & & & & \hline & & & & -20 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ & (9a-2)(a-2) = 0 \\ \therefore\ & a = \mathbf{2},\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}} \end{aligned}$$

である．

さらに，$a = \dfrac{2}{9}$ という条件を、③の x 座標に代入す

れば

$$\frac{-\frac{2}{9}+2}{2\cdot\frac{2}{9}} = \mathbf{4}$$

が①の x 座標になる。

また，①の式を求めるため、②で $a=\frac{2}{9}$ として

$$y = \frac{2}{9}x^2 - \left(-\frac{2}{9}+2\right)x - 2\cdot\frac{2}{9}+2$$
$$= \frac{2}{9}(x^2-8x+7)$$
$$= \frac{2}{9}(x-1)(x-7)$$

だから，関数①のグラフと x 軸の 2 交点の x 座標は，$x=\mathbf{1}$，$\mathbf{7}$ となる．

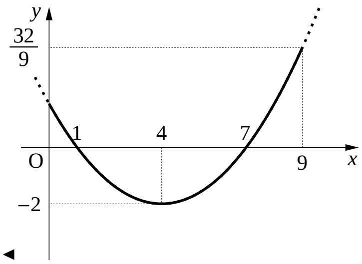
関数①の $0 \leqq x \leqq 9$ における最小値は，式①の x^2 の係数が正なので頂点における y 座標の値となり，つまり

$x=\mathbf{4}$ のとき，最小値 $\mathbf{-2}$

となる．また，$0 \leqq x \leqq 9$ における関数①の最大値は，関数①のグラフが $x=4$ に関して対称なことより，

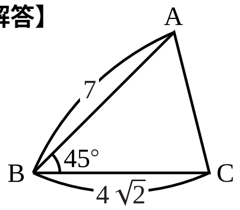
$x=\mathbf{9}$ のとき，最大値 $\mathbf{\frac{32}{9}}$

となる．



【第 3 問】 担当:matsuya

【解答】



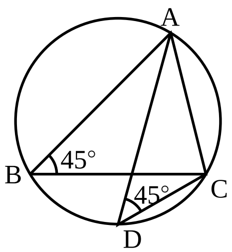
△BAC において余弦定理を用いる.

$$\mathrm{CA}^2 = \mathrm{BA}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}\cos B$$
$$= 7^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 7\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= 49 + 32 - 56$$
$$= 25$$

CA > 0 から CA = **5**。

△BAC の外接円の半径を R として，三角形 BAC において正弦定理を用いる.

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin B} = 2R$$
$$\Leftrightarrow\ 5 \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 2R$$
$$\therefore\quad R = \frac{5}{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{\frac{5}{2}\sqrt{2}}$$

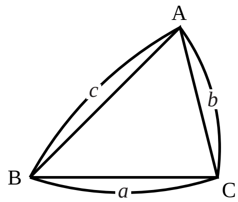


∠ABC と ∠ADC とは同じ弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ の円周角なので，円周角の定理から

$$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ADC} = \mathbf{45^\circ}$$

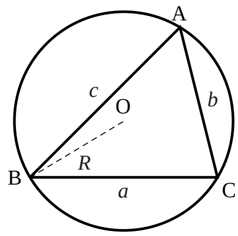
△DAC において余弦定理を用いる.

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{DC}^2 - 2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DC}\cos D$$
$$25 = x^2 + (\sqrt{10})^2 - 2\cdot\sqrt{10}\cdot x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$



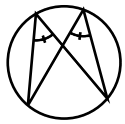
◀ 余弦定理

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$



◀ 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



◀ 円周角の定理

したがって

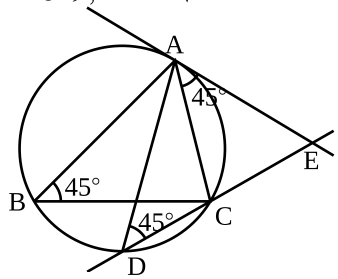
$$x^2-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}x-\mathbf{15}=0$$

$x>0$ より，$x=\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{5}}.$

◀ 解の公式で解いても良いし、

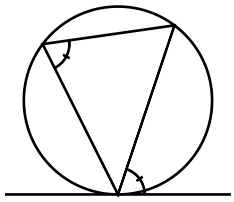
$$x^2-2\sqrt{5}x-15$$
$$=(x-3\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$$

と因数分解して解いても良い。



接弦定理から

◀ 接弦定理



$\angle\mathrm{CAE}=\angle\mathbf{AD}\mathrm{E}$（つまり $\boxed{\text{ス}}$ は 1）$\cdots(\heartsuit)$

さらに $\angle\mathrm{AEC}=\angle\mathrm{DEA}$ (共通) であるので
$\triangle\mathrm{ACE}\backsim\triangle\mathrm{D}\mathbf{AE}$（つまり $\boxed{\text{セ}}$ は 2）．故に

$$\begin{cases}\mathrm{EC}:\mathrm{CA}=\mathrm{EA}:\mathrm{AD}\\ \mathrm{EA}:\mathrm{ED}=\mathrm{EC}:\mathrm{EA}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{EA}=\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CA}}\mathrm{EC}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\sqrt{\mathbf{5}}\,\mathrm{EC}\\ \mathrm{EA}^2=\mathbf{ED}\cdot\mathrm{EC}\text{（つまり }\boxed{\text{ツ}}\text{ は 5）}\end{cases}$$

上式より $\mathrm{EC}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\mathrm{EA}\cdots(\spadesuit)$ であり，下式は

◀ EA だけを含む式に変形することを目指す。

$$\mathrm{EA}^2=(\mathrm{DC}+\mathrm{EC})\mathrm{EC}$$
$$=(\sqrt{10}+\mathrm{EC})\mathrm{EC}$$
$$=\left(\sqrt{10}+\frac{\sqrt{5}}{3}\mathrm{EA}\right)\frac{\sqrt{5}}{3}\mathrm{EA}\qquad(\because(\spadesuit))$$

これをまとめると

$$\mathrm{EA}^2=\frac{5\sqrt{2}}{3}\mathrm{EA}+\frac{5}{9}\mathrm{EA}^2$$

であるので，これを解いて $\mathrm{EA}=\dfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}}\sqrt{\mathbf{2}}.$ さらに，$(\heartsuit)$ より $\angle\mathrm{CAE}=45^\circ$ であるので

◀ $\mathrm{EA}>0$ より、両辺を EA で割ればよい。

$$\triangle\mathrm{ACE}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AE}\sin\angle\mathrm{CAE}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{15}{4}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\mathbf{75}}{\mathbf{8}}$$

【第 4 問】 担当:yady

【解答】

(1) 文字列が「AAA」となるのは，1 投目，2 投目，3 投目で常に A の文字が出てくる場合のみである．

◀ 以下「A-A-A」と表す

このときの場合の数は，$2 \times 2 \times 2 = \mathbf{8}$ 通りである．

出目が 5,6 のときを「X」と表すとする．文字列が「AB」となるのは，

◀ 以下，(2)，(3) も，「X」で 5,6 の出たことを表す

- 「X-A-B」の順列

のみである．よって，このときの場合の数は，

$2 \times 2 \times 2 = \mathbf{8}$ 通りである．

(2) サイコロを 1 回投げた際に

A の文字が書かれる確率は，$\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ である．

◀ さいころで 1,2 が出る確率

同様に，B の文字が書かれる確率は $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ である．

◀ さいころで 3,4 が出る確率

X の場合になる確率は，$\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ である．

◀ さいころで 5,6 が出る確率

ここで，文字列が「A」となる順列とその順列になる確率を考える．

◀ 3 回のさいころを振る試行は，それぞれ独立な試行なので，それぞれの確率を掛け合わせればよい．

- 「A-A-X」 $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$
- 「A-B-X」 $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$
- 「A-X-A」 $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$
- 「B-X-A」 $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$
- 「X-X-A」 $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$

以上の 5 通りがある．

よって，文字列が「A」となる確率は，$\dfrac{1}{27} \times 5 = \mathbf{\dfrac{5}{27}}$ である．

文字列が何も書かれなくなるのは，下記の順列の場合である．

- 「X-X-X」 $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$
- 「A-X-X」 $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$
- 「B-X-X」 $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$
- 「X-A-X」 $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$
- 「X-B-X」 $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$

よって，この場合の確率は，$\dfrac{1}{27} \times 5 = \mathbf{\dfrac{5}{27}}$ である．

(3) 文字列の字数が 3 になるのは，サイコロの 3 投において，常に A か B が出る場合である．サイコロを 1

回投げて A か B が出る確率は,

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ である.

よって，字数が 3 になるのは，これが 3 回続いて起こるので,

$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{8}{27}}$ である.

◀ A と B が出る場合はそれぞれ独立なので，それぞれの確率を足し合わせればよい.

ここで，余事象を考えていく.

文字列が「B」となるのは，文字列が「A」の場合と同様の確からしさである．よって，文字列の字数が 1 文字の場合の確率は,

$\frac{5}{27}\times 2=\frac{10}{27}$ である.

◀ A の確率と B の確率は等しい

以上の場合をまとめると，下記の表が得られる.

字数	0 文字	1 文字	2 文字	3 文字
確率	$\frac{5}{27}$	$\frac{10}{27}$	?	$\frac{8}{27}$

よって，文字列の字数が 2 文字になる確率は,

$1-\frac{5}{27}-\frac{10}{27}-\frac{8}{27}=\mathbf{\frac{4}{27}}$ である.

また，文字列の字数の期待値は,

$0\times\frac{5}{27}+1\times\frac{10}{27}+2\times\frac{4}{27}+3\times\frac{8}{27}=\mathbf{\frac{14}{9}}$ である.

変更履歴

- ver3(2008/01/22 00:10) 大問 1, 2, 3 の誤植を修正・傍注追加、全体的に微調整
- ver2(2008/01/21 09:30) 大問 3 を修正
- ver1(2008/01/21 02:15) 初版を公開