2007年度センター本試験・数学IA

【第 1 問】 担当：kawashima

【解答】

$$2(x-2)^2 = |3x-5| \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

〔1〕 (1) $x < \dfrac{5}{3}$ のとき，①は

$$
\begin{aligned}
& 2(x-2)^2 = 5-3x \\
\Leftrightarrow\ & 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)(2x-3) = 0 \\
\therefore\ & x = 1,\ \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

◀ $x < \dfrac{5}{3}$ のとき，$3x-5<0$ なので $|3x-5| = 5-3x$

これらは共に $x < \dfrac{5}{3}$ を満たしているので，

$x = \mathbf{1},\ \mathbf{\dfrac{3}{2}}$.

(2) $x \geqq \dfrac{5}{3}$ のときは

$$
\begin{aligned}
& 2(x-2)^2 = 3x-5 \\
\Leftrightarrow\ & 2x^2 - 11x + 13 = 0
\end{aligned}
$$

◀ 今度は $x \geqq \dfrac{5}{3}$ より $3x-5 \geqq 0$ で，$|3x-5| = 3x-5$ となる

解の公式より

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4\cdot 2\cdot 13}}{2\cdot 2} \\
&= \frac{11 \pm \sqrt{17}}{4}
\end{aligned}
$$

◀ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

この 2 つが $x \geqq \dfrac{5}{3}$ を満たすかどうか調べる． $\dfrac{11+\sqrt{17}}{4} > \dfrac{5}{3}$ はすぐにわかるので，

$$\frac{11+\sqrt{17}}{4} - \frac{5}{3} = \frac{(33+3\sqrt{17})-20}{12}$$

◀ $= \dfrac{13+3\sqrt{17}}{12} > 0$

だから $\dfrac{11+\sqrt{17}}{4} > \dfrac{5}{3}$

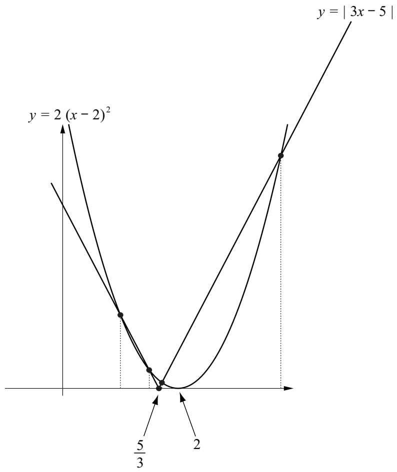
$\dfrac{11-\sqrt{17}}{4}$ と $\dfrac{5}{3}$ の大小関係を調べる.

$$\begin{aligned}&\frac{11-\sqrt{17}}{4}-\frac{5}{3}\\=&\frac{(33-3\sqrt{17})-20}{12}\\=&\frac{13-3\sqrt{17}}{12}\end{aligned}$$

の正負，すなわち $13-3\sqrt{17}$ の正負がわかればよい．そのためには，13 と $3\sqrt{17}$ の大小関係がわかればよい．$13^2=169$，$(3\sqrt{17})^2=153$ なので，$13>3\sqrt{17}$，すなわち
$13-3\sqrt{17}>0$．よって，$\dfrac{11-\sqrt{17}}{4}>\dfrac{5}{3}$．以上より，$x=\dfrac{11-\sqrt{17}}{4}$，$\dfrac{11+\sqrt{17}}{4}$ はともに，$x\geqq\dfrac{5}{3}$ を満たすので，$x<\dfrac{5}{3}$ のときとあわせて，①の解は全部で **4** つ.

◂ 正なら $\dfrac{11-\sqrt{17}}{4}>\dfrac{5}{3}$，負なら $\dfrac{11-\sqrt{17}}{4}<\dfrac{5}{3}$

（別解）グラフを用いて考える.
方程式①の解は，$y=2(x-2)^2$ と $y=|3x-5|$ の交点の y 座標である．これらのグラフを描いてみると，右図のようになる．$x<\dfrac{5}{3}$ の部分については交点の個数を図から判断することは難しいが，(1) での議論から 2 個とわかっているので，$x\geqq\dfrac{5}{3}$ の部分についてだけわかればいい．図を見ると $x\geqq\dfrac{5}{3}$ での解が 2 個であることは明らか.

◂


4 つの解のうち, 最大のものは $\dfrac{11+\sqrt{17}}{4}$ なので

$$\begin{aligned}&m\leqq\frac{11+\sqrt{17}}{4}<m+1\\\Leftrightarrow\ &4m\leqq 11+\sqrt{17}<4m+4\\\Leftrightarrow\ &\begin{cases}4m\leqq 11+\sqrt{17}\\11+\sqrt{17}<4m+4\end{cases}\end{aligned}$$

上の式は

$$4m\leqq 11+\sqrt{17}$$

$$\Rightarrow\ 4m < 16$$
$$\Leftrightarrow\ m < 4$$

◀ $\sqrt{17} < 5$ より $11 + \sqrt{17} < 16$

下の式は

$$7 + \sqrt{17} < 4m$$
$$\Rightarrow\ 11 < 4m$$
$$\Rightarrow\ m \geqq 3$$

◀ $4 < \sqrt{17}$ より $11 < 7 + \sqrt{17}$

以上より，$m = \mathbf{3}$.

（別解）

$$1 < 4 < \sqrt{17} < 5$$
$$\Rightarrow\ 1 \leqq \sqrt{17} < 5$$
$$\Rightarrow\ \frac{11+1}{4} \leqq \frac{11+\sqrt{17}}{4} < \frac{11+5}{4}$$
$$\Rightarrow\ 3 \leqq \frac{11+\sqrt{17}}{4} < 3+1$$

より $m = \mathbf{3}$ とすると簡単.

〔2〕 (1) 自然数 n が A に属するというのは，「n が 10 で割り切れる」，つまり「n が 2 でも 5 でも割り切れる」ということである．
「n が 2 で割り切れる」ためには「n が 2 でも 5 でも割り切れ」れば十分なので，$\boxed{\text{カ}}$ の答えは**十分条件であるが，必要条件ではない**．
また，「n が 20 で割り切れる」，つまり「n が 4 でも 5 でも割り切れる」ためには「n が 4 で割り切れる」ことが必要なので，$\boxed{\text{キ}}$ の答えは**必要条件であるが，十分条件ではない**（$\boxed{\text{カ}}$ と同様に，「『n が 4 でも 5 でも割り切れる』ためには『n が 4 で割り切れ』れば十分」は成立しない）．

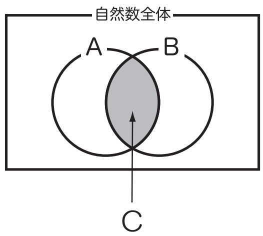
◀「p であることは，q であることの必要 or 十分条件」という言い方は慣れるまではわかりにくいと思います．p と q の順番をひっくり返し，「q であるためには，p であることが必要」or「q であるためには，p であれば十分」というふうに考えるとわかりやすくなります．
また，「『n が 2 で割り切れる』ためには『n が 2 でも 5 でも割り切れる』ことが必要」というのが正しくないことも，自然な日本語として納得できるでしょう（例えば $n = 6$ で考えてみればすぐわかります）．

（別解）「ならば」で考えることもできる．
「n が 10 で割り切れる」，すなわち「n が 2 でも 5 でも割り切れる」ならば「n が 2 で割り切れる」ので，$\boxed{\text{カ}}$ は**十分条件であるが，必要条件ではない**．同様に，「n が 20 で割り切れる」，すなわち「n が 4 でも 5 でも割り切れる」ならば「n が 4 で割り切れる」ので，$\boxed{\text{キ}}$ は**必要条件であるが，十分条件ではない**．

◀「p ならば q」というのは，「p が q の十分条件」あるいは「q が p の必要条件」ということです．詳しくは FTEXT 数学 A p.32 などを参照してください（PDF バージョンは無料で公開していますので，どなたにも読んでいただけます）．

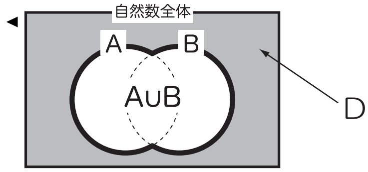
(2) C は「10 でも 4 でも割り切れる」自然数全体．これは言い換えると，「10 で割り切れて，かつ 4 でも割り切れる」自然数全体だから，A と B の共通部分 $= \boldsymbol{A \cap B}$ である．

◀A と B の共通部分は，$\left\{n \,\middle|\, n \in A \text{ かつ } n \in B\right\}$ で定義されます．わかりにくいと思ったら，A, B, C の要素を実際に書き並べてみましょう．ベン図で表すと下のようになります．

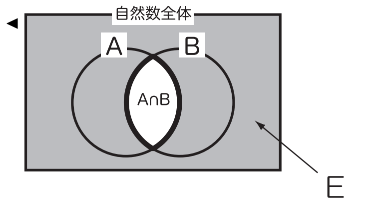


D と E についてはベン図を使って考える．

D は「10 でも 4 でも割り切れない」自然数全体だから，「10 で割り切れなく，かつ 4 でも割り切れない」自然数全体と言い換えられる．これは A の外側と B の外側の共通部分．つまり D は A にも B にも含まれない自然数全体である．図からわかるように，これは $A \cup B$ の補集合 $= \overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}}$.



E は「20 で割り切れない」自然数全体だから，「20 で割り切れる」自然数全体の補集合．「20 で割り切れる」というのは「10 で割り切れて，かつ 4 でも割り切れる」と言い換えられるから，E は C の補集合 $= \overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}}$ とわかる．



【第 2 問】担当：taki

【解答】

(1) 放物線 G の式を $f(x)$ とおき，変形する．

$$f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 8a + 4$$
$$= \{x - (a-1)\}^2 + a^2 - 6a + 3$$

よって頂点は $(\boldsymbol{a-1}, \boldsymbol{a^2-6a+3})$.
放物線 G は x^2 の係数が正 (+1) なので下に凸．頂点の y 座標が負であれば x 軸と 2 点で交わるから，

$$a^2 - 6a + 3 < 0$$
$$\Leftrightarrow\ (a-3)^2 < 6$$
$$\therefore\ \boldsymbol{3 - \sqrt{6} < a < 3 + \sqrt{6}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

二つの交点の x 座標が負になるには

$f(0) > 0$ …………………… ②

かつ

頂点の x 座標が負 …………………… ③

かつ

G が x 軸と 2 点で交わる …………………… ④

ことが必要十分.

$$② \Leftrightarrow 2a^2 - 8a + 4 > 0$$
$$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 2 > 0$$
$$\Leftrightarrow (a-2)^2 > 2$$
$$\therefore a < 2 - \sqrt{2} \text{または} 2 + \sqrt{2} < a$$

$$③ \Leftrightarrow a - 1 < 0$$
$$\therefore a < 1$$

$$④ \Leftrightarrow 3 - \sqrt{6} < a < 3 + \sqrt{6} (\because ①)$$

以上から 2 交点の x 座標が両方とも負になるのは.

②かつ③かつ④

$\therefore\ \mathbf{3-\sqrt{6}<a<2-\sqrt{2}}$

(2) 問題文の条件より

$$3 \leqq a-1 \leqq 7$$
$$\Leftrightarrow\ \mathbf{4 \leqq a \leqq 8}$$

$3 \leqq x \leqq 7$ での放物線 G の最大値は，放物線 G が下に凸であることから，端点の y 座標 $f(3)$ または $f(7)$ のいずれかである．$f(x)$ に $x=3$ と $x=7$ を代入すると

$$f(3)=2a^2-14a+19 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$
$$f(7)=2a^2-22a+67 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

となる．この $f(3)$ と $f(7)$ の大小を比較してどちらが放物線 G の最大値かを調べる．まず，$f(3) \leqq f(7)$ と置いて式を変形する．

$$f(3) \leqq f(7) \Leftrightarrow 2a^2-14a+19 \leqq 2a^2-22a+67$$
$$\Leftrightarrow a \leqq 6$$

今，$4 \leqq a \leqq 8$ なので以上を合わせると

i) **$4 \leqq a \leqq 6$ のとき $f(7)$ が最大なので**

$$\mathbf{M=f(7)=2a^2-22a+67}$$

ii) **$6 \leqq a \leqq 8$ のとき $f(3)$ が最大なので**

$$\mathbf{M=f(3)=2a^2-14a+19}$$

頂点の x 座標 $a-1$ が $3 \leqq a-1 \leqq 7$ であり，$3 \leqq x \leqq 7$ の範囲での $f(x)$ の最小値を求めるのだから，a が $3 \leqq a-1 \leqq 7$ のいずれの値をとるときでも，頂点の x 座標 $a-1$ が $f(x)$ の最小値を与える．よって本文の条件より，$f(a-1)$ が 6 となる．

$$f(a-1)=a^2-6a+3=6$$
$$\Leftrightarrow\ a^2-6a-3=0$$
$$\therefore\ a=3\pm2\sqrt{3}$$

$4 \leqq a \leqq 8$ なので，$\boldsymbol{a = 3 + 2\sqrt{3}}$
最小値が 6 のときの a の値（$a = 3 + 2\sqrt{3}$）が 6 より大きいので $f(3)$ が最大値と分かる ($\because$ ii)).

$$\begin{aligned} M &= f(3) \\ &= 2a^2 - 14a + 19 \\ &= 2(a^2 - 6a + 3) - 2a + 13 \\ &= 2 \times 6 - 2a + 13 \\ &= 25 - 2 \times (3 + 2\sqrt{3}) \\ &= \boldsymbol{19 - 4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

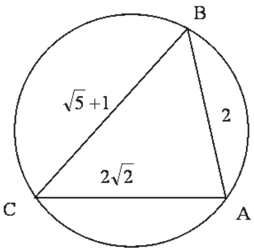
◀ $f(a-1) = a^2 - 6a + 3 = 6$

◀ $a = 3 + 2\sqrt{3}$

【**第 3 問**】担当：terada

【解答】

(1) △ABC を図示すると，右図のとおりである．∠ABC は，余弦定理より，



$$\mathrm{CA}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B$$

$$\therefore \cos B = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}$$

$$= \frac{2^2 + (\sqrt{5}+1)^2 - (2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{5}+1)}$$

$$= \frac{4 + 6 + 2\sqrt{5} - 8}{4(\sqrt{5}+1)}$$

$$= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4(\sqrt{5}+1)} = \frac{1}{2} \text{（ただし，} B = \angle\mathrm{ABC}\text{）}$$

となるので，∠ABC = **60°** である．

また，正弦定理より，

$$2R = \frac{CA}{\sin B}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}$$

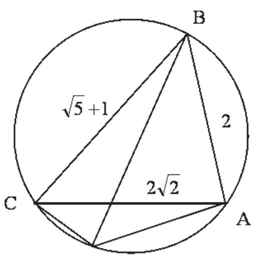
$$= \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{6}$$

$$\therefore R = \boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{6}}$$

となる．

(2) 点 D は右図のとおりである． ∠BAD と ∠BCD は，円に内接する四角形 ABCD の向かい合う 2 角であるから，∠BAD + ∠BCD = **180°** となる．



また，△BAD と △BCD の面積に注目する．△BAD と △BCD の面積は，それぞれ，

$$S_1 = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin A$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\sin C$$

である．また，$\sin C = \sin(180^\circ - A) = \sin A$ である

から，

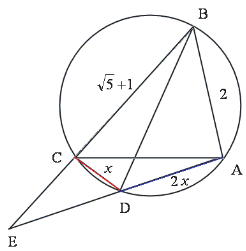
$$\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{5}-1 = \frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}\cdot\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{2\cdot\mathrm{AD}}{(\sqrt{5}+1)\cdot\mathrm{CD}}$$

これを解いて，

$$\mathrm{CD} = \frac{2}{(\sqrt{5}+1)\cdot(\sqrt{5}-1)}\mathrm{AD} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathrm{AD}$$

となる．

$\mathrm{CD}=x$ とおくと，$\mathrm{AD}=2x$ である． $\triangle\mathrm{ACD}$ に注目し，$\angle\mathrm{ADC} = 180^\circ - \angle\mathrm{ABC} = 120^\circ$であることに注意し，余弦定理を用いる．



$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{DC}^2 - 2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DC}\cos D$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\sqrt{2})^2 = (2x)^2 + x^2 - 2\cdot(2x)\cdot x\cos 120^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad 8 = 4x^2 + x^2 + 2x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 7x^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{8}{7}} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{7}}{7} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}\boldsymbol{\sqrt{14}}$$

次に，$\triangle\mathrm{ABE}$，$\triangle\mathrm{CDE}$ について考えよう．$\angle\mathrm{CDE} + \angle\mathrm{CDA} = 180^\circ$であり，$\angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{CDA} = 180^\circ$(内接する四角形の向かい合う 2 つの角の和は 180°である) であることから，$\angle\mathrm{CDE} = \angle\mathrm{ABC}$ となる．同様に，$\angle\mathrm{DCE} = \angle\mathrm{BAD}$ となる．2 角が等しいので，$\triangle\mathrm{ABE}$ と $\triangle\mathrm{CDE}$ は相似である．

そこで，2 つの面積の比は，対応する辺の比の 2 乗に比例するから，

$$\frac{S_3}{S_4} = \frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{CD}^2} = \frac{2^2}{x^2} = \frac{4}{\frac{4}{49}\times 14} = \frac{7}{2}$$

となる．また，$\triangle\mathrm{BCD}$ の面積 S_2 を $S_2 = 1$ とすると，①式より $S_1 = \sqrt{5}-1$ である．

さらに，四角形 ABCD の面積は

$$S_3 - S_4 = S_1 + S_2 = \sqrt{5}$$

であり，②式より

$$S_3 = \frac{7}{2}S_4$$

であるから，

$$S_3 = \frac{7}{\sqrt{5}}$$
$$S_4 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

となる．したがって，

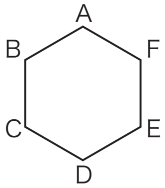
$$\frac{S_2}{S_4} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

となる．

【第 4 問】担当：matsuya

【解答】

正六角形の頂点をそれぞれ A，B，C，D，E，F とする．

◀ 

(1) (a)，(b)，(c) で出たサイコロの目をそれぞれ x，y，z とする．3 回進めたとき，点 P が正六角形の辺上を 1 周して，丁度頂点 A に到達するということは x，y，z が次の等式を満たす場合である．

$$x+y+z=6 \quad (1 \leqq x \leqq 6,\ 1 \leqq y \leqq 6,\ 1 \leqq z \leqq 6)$$

6 以下の自然数を 3 つ足し合わせて 6 になるような 3 つの数は (1,1,4)，(1,2,3)，(2,2,2) の 3 つの場合がある．ここで，x, y, z の取り方は，

（a）(1,1,4) の場合

$$\frac{3!}{2!}=3\ (\text{通り})$$

◀ 同じものを含む順列は，同じものを区別したとして何通りかを求めた後で，重複した分で割る．
例えば，$(\underbrace{a, a, \cdots a}_{n\ 個}, b, c)$ の場合は $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ 通り．

（b）(1,2,3) の場合

$$3!=6\ (\text{通り})$$

（c）(2,2,2) の場合

$$1\ (\text{通り})$$

以上から，求める場合の数は $3+6+1=$ **10（通り）**

1 回進めたときに頂点 A にとまらないサイコロの目の出方は 5 通り．このとき，点 P は頂点 B,C,D,E,F のいずれかにいる．

2 回目に進めるときに，頂点 A にとまらないサイコロの目の出方は 5 通り．2 回目に進んだ後は先ほどと同様に点 P は頂点 B,C,D,E,F のいずれかにいる．

◀ 例えば頂点 B にいる場合は，5 以外のいずれかを出せば頂点 A に行かない．C〜F でも同様．

3 回目に進めるときに頂点 A にとまらないサイコロの目の出方は 5 通り．以上から求める場合の数は $5 \times 5 \times 5=$ **125（通り）**

(2) 3 回進める間に，点 P が 3 回とも頂点 A にとまるときの x, y, z の値は次のようになる．

$$(x, y, z)=(6,6,6)$$

したがって，このときの場合の数は 1 通り．また x, y, z の値の取り方は，$6 \times 6 \times 6=216$（通り）故に，

求める確率は

$$\mathbf{\frac{1}{216}}$$

ちょうど 2 回だけ頂点 A にとまるときについて考える．

1 回目と 2 回目に頂点 A にとまるときの x, y, z の値は次のようになる．

$$(x, y, z) = (6, 6, z) \qquad (1 \leqq z \leqq 5)$$

このときの場合の数は 5 通り．

1 回目と 3 回目に頂点 A にとまるときの x, y, z の値は次のようになる．

$$(x, y, z) = (6, y, z) \qquad (y + z = 6)$$

◀ 2 回目には頂点 A 以外にとまり，3 回目で頂点 A にとまるようにするには，2 回目に 6 以外の目を出して，3 回目に頂点 A にとまるようにさいころの目を出せばよい．

このときの場合の数は，y が取れる値の場合の数と同じで 5 通り．

2 回目と 3 回目に頂点 A にとまるときの x, y, z の値は次のようになる．

$$(x, y, z) = (x, y, 6) \qquad (x + y = 6)$$

◀ 1 回目には頂点 A 以外にとまり，2 回目で頂点 A にとまるようにするには，1 回目に 6 以外の目を出して，2 回目に頂点 A にとまるようにさいころの目を出せばよい．

同様にして，このときの場合の数は 5 通り．以上からちょうど 2 回だけ頂点 A にとまる場合の数は

$$5 + 5 + 5 = 15 \text{（通り）}$$

したがって，求める確率は

$$\frac{15}{216} = \mathbf{\frac{5}{72}}$$

3 回進める間に頂点 A にとまる回数は，3 回，2 回，1 回，0 回で全てである．(1) から 3 回進める間に点 P が頂点 A にとまらない確率は $\frac{125}{216}$．3 回進める間に，点 P がちょうど 1 回だけ頂点 A にとまる確率は 1 から他の場合の確率を引けば求まる．￥故に

$$1 - \left(\frac{1}{216} + \frac{5}{72} + \frac{125}{216}\right) = \mathbf{\frac{25}{72}}$$

◀ 余事象の確率
全事象 A，B，C として，それぞれの確率を $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$ とすると，$P(A) + P(B) + P(C) = 1$ が成り立つから，
$P(C) = 1 - (P(A) + P(B))$.

(3) (2) で求めた確率を用いると，求める期待値は，

$$\frac{1}{216} \times 3 + \frac{5}{72} \times 2 + \frac{25}{72} \times 1 + \frac{125}{216} \times 0 = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

監督：kawashima
スペシャルサンクス：koichi