2006 年 1 月 29 日 09:41version

【第 1 問】

【解答】

〔1〕$x^2 - 3x - 1 = 0$ を解の公式で解いて

$$\alpha = \frac{\mathbf{3+\sqrt{13}}}{2},\quad \beta = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$$

$3 < \sqrt{13} < 4$ より $\sqrt{13} = 3.\cdots$. つまり, $3+\sqrt{13} = 6.\cdots$ となるので

$$\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = 3.\cdots$$

よって, $3 < \alpha < 4$ となるので $m = \mathbf{3}$ である. 同様にして, $3-\sqrt{13} = -0.\cdots$ より

$$\beta = \frac{3-\sqrt{13}}{2} = -0.\cdots$$

よって, $-1 < \beta < 0$ となるので $n = \mathbf{-1}$ である.

次に, 分母の有理化をすると $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$ なので

◀ 解と係数の関係より $\alpha\beta = -1$ なので $\frac{1}{\alpha} = -\beta$, という事実を用いてもよい

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} + \frac{-3+\sqrt{13}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{13}} \quad \cdots\cdots ①$$

3 乗の因数分解 $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ を用いると,

◀ 公式において, $a = \alpha, b = \frac{1}{\alpha}$ とする

◀ ① を代入した

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} &= (\alpha)^3 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left\{\alpha^2 - \alpha\cdot\frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\right\} \\ &= \sqrt{13}\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} - 1\right) \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

ここで, 恒等式 $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ を用

いれば

$$\begin{aligned}\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2} &= \left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2\cdot\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\\ &= (\sqrt{13})^2-2\\ &= 11\end{aligned}$$

であるので, ② を続ければ,

$$\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3} = \sqrt{13}\,(11-1) = \mathbf{10\sqrt{13}}$$

【別解】

恒等式 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ を用いると

◀ 必修ではないが, 時々便利

$$\begin{aligned}\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3} &= \left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3-3\cdot\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\\ &= (\sqrt{13})^3-3\sqrt{13} = \mathbf{10\sqrt{13}}\end{aligned}$$

〔2〕(1) 「$\cdots$」の否定を$\overline{「\cdots」}$で表すと,

$$\begin{aligned}&\overline{p}\\ \Leftrightarrow\ &\overline{「a,\ b\ \text{は共に有理数}」}\\ \Leftrightarrow\ &\overline{「a\ \text{は有理数}」\text{かつ}「b\ \text{は有理数}」}\\ \Leftrightarrow\ &\overline{「a\ \text{は有理数}」}\text{または}\overline{「b\ \text{は有理数}」}\\ \Leftrightarrow\ &「a\ \text{は無理数}」\text{または}「b\ \text{は無理数}」\end{aligned}$$

◀ ド・モルガンの法則

よって, ③「$a,\ b$ の少なくとも一方は無理数である」が答え.

【別解】

a だけ が有理数でなくても（$\Longleftrightarrow$ 無理数であっても）, 条件 p :「$a,\ b$ は共に有理数である」に当てはまらないので, 答えは ③「$a,\ b$ の少なくとも一方は無理数である」

◀ ド・モルガンの法則を使うこともできるようにするべき

(2) 次の２つの命題を考えればよい.

$$\begin{cases}\text{命題}“\ p \Rightarrow「q\ \text{かつ}\ r」”\\ (\text{真ならば}「q\ \text{かつ}\ r」\text{は}\ p\ \text{の必要条件})\\ \text{命題}“「q\ \text{かつ}\ r」\Rightarrow p\ ”\\ (\text{真ならば}「q\ \text{かつ}\ r」\text{は}\ p\ \text{の十分条件})\end{cases}$$

ここで条件「q かつ r」は「$a+b,\ ab,\ \dfrac{a}{b}$ はすべて有理数」である.

- 命題 “ $p \Rightarrow$「q かつ r」”
  有理数同士の和, 積, 商は, 以下のようにしていずれも有理数であるので, 命題は真.
  $a = \dfrac{a_1}{a_2},\ b = \dfrac{b_1}{b_2}$ とすれば,
  $$\begin{cases} a+b = \dfrac{a_1b_2+b_1a_2}{a_2b_2} \\ ab = \dfrac{a_1b_1}{a_2b_2} \\ \dfrac{a}{b} = a \div b = \dfrac{a_1b_2}{a_2b_1} \end{cases}$$
  ………………③
- 命題 “「q かつ r」$\Rightarrow p$ ”
  $a = \sqrt{2},\ b = -\sqrt{2}$ などの反例によって, 偽である.
  実際, $a = \sqrt{2},\ b = -\sqrt{2}$ のとき, $a+b = 0,\ ab = -2,\ \dfrac{a}{b} = -1$ となって仮定「q かつ r」を満たすが, 明らかに条件 p を満たさない.

以上より,「q かつ r」は p の必要条件であるが十分条件ではない, つまり答えは 1.

(3) ３つの命題をそれぞれ考える.

- 命題「$p \Rightarrow q$」は真（③ によって）
- 命題「$p \Rightarrow q$」の逆は「$q \Rightarrow p$」, つまり命題「$a+b,\ ab$ が有理数ならば $a,\ b$ は有理数」となる.
  この命題には反例 $a = \sqrt{2},\ b = -\sqrt{2}$ などが存在し, 偽である.
- 対偶は元の命題と真偽が一致するので,「$p \Rightarrow q$」の対偶は真である.

以上より, 答えは 2

【第 2 問】

【解答】

①を因数分解すると

$$y = (3x-2)(2x+5)$$

となる.

この 2 次関数のグラフは，右図のようになるため，$y \leqq 0$ となるのは

$$\boldsymbol{-\frac{5}{2} \leqq x \leqq \frac{2}{3}}$$

のときである.

①のグラフを x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動したときに得られる曲線の方程式は

$$y-b = \{3(x-a)-2\}\{2(x-a)+5\} \quad \cdots\cdots ②$$

である.

②は原点 $(0,\ 0)$ を通るので，x，y にそれぞれ 0 を代入すると

$$-b = (-3a-2)(-2a+5)$$

となるので，これを解いて

$$b = -6a^2+11a+10 \quad \cdots\cdots ③$$

③を②に代入して

$$\begin{aligned} &y-(-6a^2+11a+10) \\ &\qquad = \{3(x-a)-2\}\{2(x-a)+5\} \end{aligned}$$

これを変形していくと

$$\begin{aligned} &y-(-6a^2+11a+10) \\ &\qquad = \{3x+(-3a-2)\}\{2x+(-2a+5)\} \\ \Leftrightarrow\ &y = 6x^2-(12a-11)x \quad \cdots\cdots ④ \end{aligned}$$

④に $x=-2$ を代入すると

$$\begin{aligned} y &= 6(-2)^2+2(12a-11) \\ &= 24a+2 \end{aligned}$$

④に $x = 3$ を代入すると

$$y = 6 \cdot 3^2 - 3(12a - 11)$$
$$= 87 - 36a$$

以上 2 つの式を連立して解くと

$$a = \frac{17}{12}$$

これを④に代入して

$$y = 6x^2 - \left(12 \cdot \frac{17}{12} - 11\right)x$$
$$= 6x^2 - 6x$$
$$= 6\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}$$

これより，$-2 \leqq x \leqq 3$ における最小値は

$$-\frac{3}{2}\left(x = \frac{1}{2}\text{のとき}\right)$$

最大値は

$$36\,(x = -2,\ 3\ \text{のとき})$$

となる．

【第 3 問】

【解答】

三角形 ADH に関する三平方の定理より

$$\mathrm{EH} = \sqrt{10^2 - (\sqrt{10})^2} = 3\sqrt{10}$$

三角形 ABF に関する三平方の定理より

$$\mathrm{EF} = \sqrt{8^2 - (\sqrt{10})^2} = 3\sqrt{6}$$

よって，三角形 EFH に関する三平方の定理より

$$\mathrm{FH} = \sqrt{(3\sqrt{10})^2 + (3\sqrt{6})^2} = \mathbf{12}$$

余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{FAH} = \frac{10^2 + 8^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 10} = \mathbf{\frac{1}{8}}$$

また，三角形 AFH の面積は

$$\begin{aligned} \mathrm{AF}\cdot\mathrm{AH}\cdot\sin\angle\mathrm{FAH}\cdot\frac{1}{2} &= 10\cdot 8\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \mathbf{15\sqrt{7}} \end{aligned}$$

◀ $\cos\angle\mathrm{FAH}=\frac{1}{8}$ より，$\sin\angle\mathrm{FAH}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

R は ∠ AFH の角の二等分線と ∠ FAH の角の二等分線の交点なので，三角形 AFH の **内心** となる．

∠AFH に関する角の二等分線の定理により，

$$\begin{aligned} \mathrm{AP}:\mathrm{PH} &= \mathrm{FA}:\mathrm{FH} \\ &= 8:12 \\ &= 2:3 \end{aligned}$$

AP + PH = AH = 10 なので，AP = **4**

また，∠FAP に関する角の二等分線の定理により，

$$\begin{aligned} \mathrm{FR}:\mathrm{RP} &= \mathrm{FA}:\mathrm{AP} \\ &= 8:4 \\ &= 2:1 \end{aligned}$$

よって，FP : PR = FR + RP : PR = **3** : 1

まず，四面体 EAFH の体積を求めると，

$$\begin{aligned} &\mathrm{EF}\cdot\mathrm{EH}\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AE}\cdot\frac{1}{3} \\ &= 3\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{1}{3} \\ &= 15\sqrt{6} \end{aligned}$$

となる．

四面体 EAFH の底面を三角形 AFH，四面体 EAPR の底面を三角形 APR とみると，２つの四面体は高さが共通の四面体となる．

高さが共通の四面体の体積の比は，底面積の比となる．

$$\triangle\mathrm{AFP} = \frac{4}{4+6}\cdot\triangle\mathrm{AFH}$$

$$\triangle\mathrm{APR} = \frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{AFP}$$

よって,

$$\triangle \mathrm{APR} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \triangle \mathrm{AFH}$$

これより, 四面体 EAPR の体積は, 四面体 EAFH の体積の $\frac{2}{15}$ 倍になる．よって，四面体 EAPR の体積は

$$\frac{2}{15} \cdot 15\sqrt{6} = \mathbf{2\sqrt{6}}$$

となる．

【第 4 問】

【解答】

(1) a, b, c, d の最大の数が 3 以下であるのは，4 がひとつもでず，a, b, c, d すべてが 1 か 2 か 3 のどれかである場合なので

$$3^4 = 81$$

最大の数が 4 であるのは，4 がひとつでもでる場合なので，最大の数が 3 以下である場合の補集合をとって

$$4^4 - 3^4 = 175$$

(2) 1 から 4 までの数から，重複を許さず 3 つの数をとり，a, b, c に小さい順に当てはめれば $a < b < c$ となる．つまり，$a < b < c$ となる場合は，4 つの数から重複を許さず 3 つを選ぶ場合と同じであるので

$${}_4\mathrm{C}_3 = 4$$

d の数は 1,2,3,4 の 4 通り．よって求める場合は

$$4 \times 4 = 16$$

(3) (i) 得点が 1 点となるのは

$$a = b = c = d$$

のときであるから，a, b, c, d すべてが 1 のと

き，2 のとき，3 のとき，4 のときの 4 通り．よって確率は

$$\frac{4}{4^4} = \frac{1}{64}$$

得点が 4 点となるのは $a = 1, d = 4$ で，$b = 1, 2, 3, 4$，$c = 1, 2, 3, 4$ (ただし b $\leqq c$) のときである．これを満たす (b, c) の組は

$$(1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4),\ (2, 2),$$
$$(2, 3),\ (2, 4),\ (3, 3),\ (3, 4),\ (4, 4)$$

の 10 通り．よって

$$\frac{10}{4^4} = \frac{5}{128}$$

(4) 得点が 2 点となるのは

I. $a = 1, d = 2$ で

$$b = 1, 2$$
$$c = 1, 2 \ (\text{ただし } b \leqq c)$$

II. $a = 2, d = 3$ で

$$b = 2, 3$$
$$c = 2, 3 \ (\text{ただし } b \leqq c)$$

III. $a = 3, d = 4$ で

$$b = 3, 4$$
$$c = 3, 4 \ (\text{ただし } b \leqq c)$$

の 3 通りだが，これらは同じ確率でおこるので，I だけを計算して 3 倍すればよい．I を満たす (b, c) の組は

$$(1, 1),\ (1, 2),\ (2, 2)$$

の 3 通りであるので，I の確率は

$$\frac{3}{4^4} = \frac{3}{256}$$

である．得点が 2 点となるのは，これを 3

倍して $\dfrac{9}{256}$.

得点が 3 点となるのは

I. $a=1, d=3$ で

$$b = 1,2,3$$
$$c = 1,2,3 \ (\text{ただし } b \leqq c)$$

II. $a=2, d=4$ で

$$b = 2,3,4$$
$$c = 2,3,4 \ (\text{ただし } b \leqq c)$$

の 2 通りだが，これらは同じ確率でおこるので、I だけを計算して 2 倍すればよい．I を満たす (b,c) の組は

$$(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,3)$$

の 6 通りであるので，I の確率は

$$\frac{6}{4^4} = \frac{3}{128}$$

である．得点が 3 点となるのは，これを 2 倍して $\dfrac{3}{64}$.

得点は 5 点以上にはならないので，以上と (i) より，得点の期待値は

$$1\frac{1}{64} + 2\frac{9}{256} + 3\frac{3}{64} + 4\frac{5}{128}$$
$$= \frac{49}{128}$$