

2006 年 1 月 29 日 09:41 version

【第 1 問】

【解答】

[1] $x^2 - 3x - 1 = 0$ を解の公式で解いて

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \quad \beta = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

$3 < \sqrt{13} < 4$ より $\sqrt{13} = 3. \dots$. つまり,
 $3 + \sqrt{13} = 6. \dots$ となるので

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 3. \dots$$

よって, $3 < \alpha < 4$ となるので $m = 3$ である.
 同様にして, $3 - \sqrt{13} = -0. \dots$ より

$$\beta = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} = -0. \dots$$

よって, $-1 < \beta < 0$ となるので $n = -1$ である.

次に, 分母の有理化をすると $\frac{1}{\alpha} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$ なので

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{1}{\alpha} &= \frac{3 + \sqrt{13}}{2} + \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned} \quad \text{.....} \quad \textcircled{1}$$

3 乗の因数分解 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ を用いると,

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} &= (\alpha)^3 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \left\{ \alpha^2 - \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \right\} \\ &= \sqrt{13} \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad \text{.....} \quad \textcircled{2}$$

ここで, 恒等式 $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ を用

◀ 解と係数の関係より $\alpha\beta = -1$ なので $\frac{1}{\alpha} = -\beta$, という事実を用いてもよい

◀ 公式において, $a = \alpha, b = \frac{1}{\alpha}$ とする

◀ ①を代入した

いれば

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \\ &= (\sqrt{13})^2 - 2 \\ &= 11\end{aligned}$$

であるので、② を続ければ、

$$\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = \sqrt{13} (11 - 1) = 10\sqrt{13}$$

【別解】

恒等式 $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ を用いると

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 - 3 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \\ &= (\sqrt{13})^3 - 3\sqrt{13} = 10\sqrt{13}\end{aligned}$$

[2] (1) 「…」の否定を「 $\overline{\dots}$ 」で表すと、

$$\begin{aligned}\overline{p} &\Leftrightarrow \overline{\text{「}a, b \text{ は共に有理数」}} \\ &\Leftrightarrow \overline{\text{「}a \text{ は有理数」かつ「}b \text{ は有理数」}} \\ &\Leftrightarrow \overline{\text{「}a \text{ は有理数」}} \text{ または } \overline{\text{「}b \text{ は有理数」}} \\ &\Leftrightarrow \text{「}a \text{ は無理数」} \text{ または } \text{「}b \text{ は無理数」}\end{aligned}$$

よって、③「 a, b の少なくとも一方は無理数である」が答え。

【別解】

a だけが有理数でなくても (\Leftrightarrow 無理数であっても), 条件 p : 「 a, b は共に有理数である」に当てはまらないので, 答えは③「 a, b の少なくとも一方は無理数である」

(2) 次の2つの命題を考えればよい。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{命題「} p \Rightarrow \text{「}q \text{ かつ } r \text{」} \\ \text{(真ならば「}q \text{ かつ } r \text{」は } p \text{ の必要条件)} \\ \text{命題「「}q \text{ かつ } r \text{」} \Rightarrow p \text{」} \\ \text{(真ならば「}q \text{ かつ } r \text{」は } p \text{ の十分条件)} \end{array} \right.$$

◀ 必修ではないが, 時々便利

◀ ド・モルガンの法則

◀ ド・モルガンの法則を使うこともできるようにするべき

ここで条件「 q かつ r 」は「 $a+b, ab, \frac{a}{b}$ はすべて有理数」である。

- 命題 “ $p \Rightarrow$ 「 q かつ r 」 ”

有理数同士の和, 積, 商は, 以下のよう
にしていずれも有理数であるので,
命題は真.

$$a = \frac{a_1}{a_2}, b = \frac{b_1}{b_2} \text{ とすれば,}$$

$$\begin{cases} a + b = \frac{a_1b_2 + b_1a_2}{a_2b_2} \\ ab = \frac{a_1b_1}{a_2b_2} \\ \frac{a}{b} = a \div b = \frac{a_1b_2}{a_2b_1} \end{cases} \quad \text{③}$$

- 命題 “「 q かつ r 」 $\Rightarrow p$ ”

$a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$ などの反例によつて,
偽である.

実際, $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$ のとき,
 $a + b = 0, ab = -2, \frac{a}{b} = -1$ と
なつて仮定「 q かつ r 」を満たすが,
明らかに条件 p を満たさない.

以上より, 「 q かつ r 」は p の必要条件であるが
十分条件ではない, つまり答えは
①.

(3) 3つの命題をそれぞれ考える.

- 命題 「 $p \Rightarrow q$ 」は真 (③によつて)
- 命題 「 $p \Rightarrow q$ 」の逆は「 $q \Rightarrow p$ 」, つ
まり命題「 $a+b, ab$ が有理数ならば
 a, b は有理数」となる.
この命題には反例 $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$
などが存在し, 偽である.
- 対偶は元の命題と真偽が一致するの
で, 「 $p \Rightarrow q$ 」の対偶は真である.

以上より, 答えは ②

【第2問】

【解答】

①を因数分解すると

$$y = (3x - 2)(2x + 5)$$

となる.

この2次関数のグラフは、右図のようになるため、 $y \leq 0$ となるのは

$$-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

のときである.

①のグラフを x 軸方向に a , y 軸方向に b だけ平行移動したときに得られる曲線の方程式は

$$y - b = \{3(x - a) - 2\} \{2(x - a) + 5\} \quad \text{.....} \quad \textcircled{2}$$

である.

②は原点 $(0, 0)$ を通るので、 x, y にそれぞれ 0 を代入すると

$$-b = (-3a - 2)(-2a + 5)$$

となるので、これを解いて

$$b = -6a^2 + 11a + 10 \quad \text{.....} \quad \textcircled{3}$$

③を②に代入して

$$\begin{aligned} y - (-6a^2 + 11a + 10) \\ = \{3(x - a) - 2\} \{2(x - a) + 5\} \end{aligned}$$

これを変形していくと

$$\begin{aligned} y - (-6a^2 + 11a + 10) \\ = \{3x + (-3a - 2)\} \{2x + (-2a + 5)\} \\ \Leftrightarrow y = 6x^2 - (12a - 11)x \quad \text{.....} \quad \textcircled{4} \end{aligned}$$

④に $x = -2$ を代入すると

$$\begin{aligned} y &= 6(-2)^2 + 2(12a - 11) \\ &= 24a + 2 \end{aligned}$$

④に $x = 3$ を代入すると

$$\begin{aligned} y &= 6 \cdot 3^2 - 3(12a - 11) \\ &= 87 - 36a \end{aligned}$$

以上 2 つの式を連立して解くと

$$a = \frac{17}{12}$$

これを④に代入して

$$\begin{aligned} y &= 6x^2 - \left(12 \cdot \frac{17}{12} - 11\right)x \\ &= 6x^2 - 6x \\ &= 6\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

これより, $-2 \leq x \leq 3$ における最小値は

$$-\frac{3}{2} \left(x = \frac{1}{2} \text{ のとき}\right)$$

最大値は

$$36 \left(x = -2, 3 \text{ のとき}\right)$$

となる.

【第 3 問】

【解答】

三角形 ADH に関する三平方の定理より

$$EH = \sqrt{10^2 - (\sqrt{10})^2} = 3\sqrt{10}$$

三角形 ABF に関する三平方の定理より

$$EF = \sqrt{8^2 - (\sqrt{10})^2} = 3\sqrt{6}$$

よって, 三角形 EFH に関する三平方の定理より

$$FH = \sqrt{(3\sqrt{10})^2 + (3\sqrt{6})^2} = 12$$

余弦定理により

$$\cos \angle FAH = \frac{10^2 + 8^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{1}{8}$$

また、三角形 AFH の面積は

$$\begin{aligned} AF \cdot AH \cdot \sin \angle FAH \cdot \frac{1}{2} &= 10 \cdot 8 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 15\sqrt{7} \end{aligned}$$

R は $\angle AFH$ の角の二等分線と $\angle FAH$ の角の二等分線の交点なので、三角形 AFH の内心となる。

$\angle AFH$ に関する角の二等分線の定理により、

$$\begin{aligned} AP : PH &= FA : FH \\ &= 8 : 12 \\ &= 2 : 3 \end{aligned}$$

$AP + PH = AH = 10$ なので、 $AP = 4$

また、 $\angle FAP$ に関する角の二等分線の定理により、

$$\begin{aligned} FR : RP &= FA : AP \\ &= 8 : 4 \\ &= 2 : 1 \end{aligned}$$

よって、 $FP : PR = FR + RP : PR = 3 : 1$

まず、四面体 EAFH の体積を求めると、

$$\begin{aligned} EF \cdot EH \cdot \frac{1}{2} \cdot AE \cdot \frac{1}{3} \\ &= 3\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{1}{3} \\ &= 15\sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。

四面体 EAFH の底面を三角形 AFH、四面体 EAPR の底面を三角形 APR とみると、2つの四面体は高さが共通の四面体となる。

高さが共通の四面体の体積の比は、底面積の比となる。

$$\begin{aligned} \Delta AFP &= \frac{4}{4+6} \cdot \Delta AFH \\ \Delta APR &= \frac{1}{3} \cdot \Delta AFP \end{aligned}$$

$$\leftarrow \cos \angle FAH = \frac{1}{8} \text{ より, } \sin \angle FAH = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

よって,

$$\Delta APR = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \Delta AFH$$

これより, 四面体 $EAPR$ の体積は, 四面体 $EAFH$ の体積の $\frac{2}{15}$ 倍になる. よって, 四面体 $EAPR$ の体積は

$$\frac{2}{15} \cdot 15\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

となる.

【第 4 問】

【解答】

- (1) a, b, c, d の最大の数が 3 以下であるのは, 4 がひとつもせず, a, b, c, d すべてが 1 か 2 か 3 のどれかである場合なので

$$3^4 = 81$$

最大の数が 4 であるのは, 4 がひとつでもである場合なので, 最大の数が 3 以下である場合の補集合をとって

$$4^4 - 3^4 = 175$$

- (2) 1 から 4 までの数から, 重複を許さず 3 つの数をとり, a, b, c に小さい順に当てはめれば $a < b < c$ となる. つまり, $a < b < c$ となる場合は, 4 つの数から重複を許さず 3 つを選ぶ場合と同じであるので

$${}_4C_3 = 4$$

d の数は 1, 2, 3, 4 の 4 通り. よって求める場合は

$$4 \times 4 = 16$$

- (3) (i) 得点が 1 点となるのは

$$a = b = c = d$$

のときであるから, a, b, c, d すべてが 1 のと

き, 2 のとき, 3 のとき, 4 のときの 4 通り.
よって確率は

$$\frac{4}{4^4} = \frac{1}{64}$$

得点が 4 点となるのは $a = 1, d = 4$ で,
 $b = 1, 2, 3, 4, c = 1, 2, 3, 4$ (ただし $b \leq c$) の
ときである. これを満たす (b, c) の組は

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), \\ (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)$$

の 10 通り. よって

$$\frac{10}{4^4} = \frac{5}{128}$$

(4) 得点が 2 点となるのは

I. $a = 1, d = 2$ で

$$b = 1, 2 \\ c = 1, 2 \text{ (ただし } b \leq c \text{)}$$

II. $a = 2, d = 3$ で

$$b = 2, 3 \\ c = 2, 3 \text{ (ただし } b \leq c \text{)}$$

III. $a = 3, d = 4$ で

$$b = 3, 4 \\ c = 3, 4 \text{ (ただし } b \leq c \text{)}$$

の 3 通りだが, これらは同じ確率でおこる
ので, I だけを計算して 3 倍すればよい. I
を満たす (b, c) の組は

$$(1, 1), (1, 2), (2, 2)$$

の 3 通りであるので, I の確率は

$$\frac{3}{4^4} = \frac{3}{256}$$

である. 得点が 2 点となるのは, これを 3

倍して $\frac{9}{256}$.

得点が 3 点となるのは

I. $a = 1, d = 3$ で

$$b = 1, 2, 3$$

$$c = 1, 2, 3 \text{ (ただし } b \leq c \text{)}$$

II. $a = 2, d = 4$ で

$$b = 2, 3, 4$$

$$c = 2, 3, 4 \text{ (ただし } b \leq c \text{)}$$

の 2 通りだが、これらは同じ確率でおこるので、I だけを計算して 2 倍すればよい。I を満たす (b, c) の組は

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)$$

の 6 通りであるので、I の確率は

$$\frac{6}{4^4} = \frac{3}{128}$$

である。得点が 3 点となるのは、これを 2 倍して $\frac{3}{64}$.

得点は 5 点以上にはならないので、以上と (i) より、得点の期待値は

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \frac{1}{64} + 2 \cdot \frac{9}{256} + 3 \cdot \frac{3}{64} + 4 \cdot \frac{5}{128} \\ &= \frac{49}{128} \end{aligned}$$