【第 1 問】

【解答】

〔1〕

$$y = x^2 - 2(a+2)x + a^2 - a + 1 \qquad \cdots\cdots①$$

(1) Y は y 軸上の点の座標であり，$x = 0$ を ① に代入したときの y の値である．

$$Y = a^2 - a + 1$$
$$\Leftrightarrow \ Y = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

◀ 平方完成

よって，Y が最小になるのは $a = \mathbf{\frac{1}{2}}$ のとき．

最小値は $\mathbf{\frac{3}{4}}$

このときのグラフ G は

$$y = x^2 - 5x + \frac{3}{4} \qquad \cdots\cdots②$$

となり，グラフ G と x 軸の交点は，y 座標が 0 なので ② に $y = 0$ を代入し

$$0 = x^2 - 5x + \frac{3}{4}$$

これを解いて

$$x = \mathbf{\frac{5 \pm \sqrt{22}}{2}}$$

◀ 解の公式

(2) ① の式を平方完成すると

$$y = \{x - (a+2)\}^2 - 5a - 3$$

なのでグラフ G の対称軸は $x = a + 2$ であり，頂点の座標は $(a+2,\ -5a-3)$ とわかる．グラフ G が y 軸に関して対称になるのは，グラフ G の対称軸が y 軸と一致するときであるから

$$a + 2 = 0$$

より，$a = \mathbf{-2}$ のときである．グラフ G が x 軸に接するのは，頂点の y 座標が 0 のときであるから

$$-5a - 3 = 0$$

より，$a=-\mathbf{\frac{3}{5}}$ である．これら 2 つの a の値よりグラフ G_1 の頂点の座標は $(0,\ 7)$，グラフ G_2 の頂点の座標は $\left(\frac{7}{5},\ 0\right)$ とわかるので，グラフ G_1 を x 軸方向に $\mathbf{\frac{7}{5}}$，y 軸方向に $\mathbf{-7}$ だけ平行移動すると，グラフ G_2 に重なる．

〔2〕 (1) グラフ C が x 軸と共有点をもたないのは $\frac{b-2}{a}$ が負になるときである．a も b も正であるから

$$b-2<0$$
$$\Leftrightarrow\ b<2$$

のときに $\frac{b-2}{a}$ が負になる．よって b（小さい方のサイコロの目）が 1 であればよい（a の値はなんでもよい）ので，求める確率は $\mathbf{\frac{1}{6}}$

共有点の個数が 1 個のときとは $\frac{b-2}{a}$ が 0 になるときであり，b が 2 であればよいので, 求める確率は $\mathbf{\frac{1}{6}}$

共有点の個数が 2 個のときは，上記以外の場合であるので，求める確率は $\mathbf{\frac{2}{3}}$

(2) (1) より

$$0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

(3) C と x 軸が共有点をもつのは

$$\frac{b-2}{a}\leqq 0$$

のときで，このときの共有点の x 座標は，グラフ C に $y=0$ を代入して

$$0=x^2-\frac{b-2}{a}$$
$$\Leftrightarrow\ x=\pm\sqrt{\frac{b-2}{a}}$$

である．これより，x が整数となるのは $\frac{b-2}{a}$ が 0, 1, 4 のときである．

◀ $\frac{b-2}{a}$ が最大となるのは $a=1$, $b=6$ のときであり，このとき $\frac{b-2}{a}=4$ なので，9 以上の平方数は現れない．

$\dfrac{b-2}{a}=0$ となるのは

$(a,\ b)=(1,\ 2)(2,\ 2)(3,\ 2)(4,\ 2)(5,\ 2)(6,\ 2)$

$\dfrac{b-2}{a}=1$ となるのは

$(a,\ b)=(1,\ 3)(2,\ 4)(3,\ 5)(4,\ 6)$

$\dfrac{b-2}{a}=4$ となるのは

$(a,\ b)=(1,\ 6)$

これより，条件を満たす $(a,\ b)$ の組は 11 通り．
$(a,\ b)$ の組の総数は $6\cdot 6=36$ であるから，求める確率は $\mathbf{\dfrac{11}{36}}$

【第 2 問】

【解答】

〔1〕割り算を実行すると

$$A = (x^2 - x - a)(x^2 + x + a^2) + (a + b)x + a^3 + b^3$$

となるので

$$Q = x^2 + x + a^{\mathbf{2}}$$
$$R = (a + b)x + a^{\mathbf{3}} + b^{\mathbf{3}}$$

(1) $R = x + 7$ のとき

$$\begin{cases} a + b = 1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①} \\ a^3 + b^3 = 1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②} \end{cases}$$

である．①より $b = 1 - a$，これを②に代入して

$$\begin{aligned} & a^3 + (1 - a^3) = 7 \\ \Leftrightarrow\ & a^3 + (1 - 3a + 3a^2 - a)^3 = 7 \\ \Leftrightarrow\ & a^2 - a - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a - 2)(a + 1) = 0 \end{aligned}$$

よって，$a = \mathbf{2}$ または $a = \mathbf{-1}$

(2) (i) 「全ての実数 X に対して $Q > 0$」とはつまり，二次関数 $y = x^2 + x + a^2$ が x 軸の上側にあるということ．このグラフは下に凸であるから，頂点が x 軸の上側にあればよい．

$$\begin{aligned} y &= x^2 + x + a^2 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right) + a^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

より，頂点の座標は $\left(-\frac{1}{2},\ a^2 - \frac{1}{4}\right)$

とわかるが，頂点の y 座標が正であればよいから

$$\begin{aligned} & a^2 - \frac{1}{4} > 0 \\ \Leftrightarrow\ & a < -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < a \end{aligned}$$

$a < -\frac{1}{2} \Rightarrow a < -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < a$ は成り立たないが，$a < -\frac{1}{2} \Rightarrow a < -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < a$ は成り立

つので, $a<-\dfrac{1}{2}$ は，すべての実数 x に対して，$Q>0$ となるための**十分条件であるが必要条件ではない**.

(ii) 「A が B で割り切れる」とは，あまりが 0 であることであるから

$$\begin{aligned}
&(a+b)x+a^3+b^3=0\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} a+b=0\\ a^3+b^3=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} a+b=0\\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &a+b=0
\end{aligned}$$

である. よって，$a+b=0$ は，A が B で割り切れるための**必要十分条件である**.

〔2〕 $\angle\mathrm{CAD}=\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}\\
\Rightarrow\ &\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{4}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{4}\\
\Leftrightarrow\ &4-4\cos^2\theta=\cos^2\theta\\
\Leftrightarrow\ &\cos^2\theta=\frac{4}{5}
\end{aligned}$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ であるから $\cos\theta>0$ となる.

よって

$$\cos\angle\mathrm{CAD}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

$\triangle\mathrm{ADC}$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}
\mathrm{CD}^2&=\mathrm{AC}^2+\mathrm{AD}^2-2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\cos\theta\\
&=(2\sqrt{5})^2+8^2+2\cdot2\sqrt{5}\cdot8\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}\\
&=20
\end{aligned}$$

よって，CD は $2\sqrt{5}$ である. これにより

（$\triangle$ADC の面積）

$$=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 8\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \mathbf{8}$$

また，AB は △ADC の外接円の直径であるから，△ADC に正弦定理を用いて

$$\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{CD}}{\sin\theta}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$= \mathbf{10}$$

【第 3 問】

【解答】

(1) まず

$$a_1 = S_1 = \mathbf{23}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= S_2 - S_1 \\ &= 44 - 23 \\ &= \mathbf{21} \end{aligned}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= -n^2 + 24n - \left\{-(n-1)^2 + 24(n-1)\right\} \\ &= -2n + 25 \end{aligned}$$

これは $n = 1$ においても成り立つから

$$a_n = -2n + 25 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

よって

$$\begin{aligned} a_n < 0 &\Leftrightarrow -2n + 25 < 0 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{25}{2} \end{aligned}$$

これより $a_n < 0$ となる自然数 n の値の範囲は

$$n \geqq \mathbf{13}$$

これより

$$\sum_{k=1}^{40} |a_k| = a_1 + a_2 + \cdots + a_{12} - (a_{13} + a_{14} + \cdots + a_{40})$$

数列 $\{a_n\}$ は等差数列であるから

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_{12} &= \frac{12}{2}(a_1 + a_{12}) \\ &= 6(23 + 1) \\ &= 144 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{13} + a_{14} + \cdots + a_{40} &= \frac{28}{2}(a_{13} + a_{40}) \\ &= 14(-1 - 55) \\ &= -784 \end{aligned}$$

よって

$$\sum_{k=1}^{40}|a_k| = 144-(-784)$$
$$= \mathbf{928}$$

(2) (i) $b_3 < 10 < b_4$ であるから

$$c_{10} = b_3 = \mathbf{9}$$

また，$27 = b_4$ より，$C_n = 27$ となる自然数 n の値の範囲は

$$b_4 \leqq n \leqq b_5 - 1$$

すなわち

$$27 \leqq n \leqq 80$$

であるから，$c_n = 27$ である自然数 n は全部で **54** 個ある．

(ii) $k = 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$c_n = b_n$ である自然数 n の値の範囲は

$$b_k \leqq n \leqq b_{k+1} - 1$$

すなわち

$$3^k - 1 \leqq n \leqq 3^k - 1$$

であるから，$c_n = 3^{k-1}$ である自然数 n は

$$3^k - 3^{k-1} = 2 \cdot 3^{k-1}$$

より，$2 \cdot 2^{k-1}$ 個である．あとは数えて 290 になる．

【第 4 問】

【解答】

$\triangle$HBC は 90°, 60°, 30° の直角三角形であることがわかるので，BC = 2**CH** である．

$\angle$MAC は，接弦定理により $\angle$ABC と等しい．

$\triangle$MAC と $\triangle$ABC は相似である．対応する辺を考えて

$$\frac{AC}{MC} = \frac{BC}{AC}$$

これより

$$AC^2 = MC \cdot \mathbf{BC}$$

である．

M は BC の中点なので，$MC = \frac{1}{2}BC$ であるから，

$$AC^2 = \frac{1}{2}BC \cdot BC$$

$$\Leftrightarrow\ AC^2 = \frac{1}{2}(2CH)^2$$

◀ BC=2CH

よって

$$AC = \sqrt{\mathbf{2}}CH$$

これより $\triangle$HAC は $\angle$CHA=90°, AH=CH の**直角二等辺三角形**である．

また

$$\begin{aligned}\angle AMB &= \angle MAC + \angle MCA \\ &= \angle MAC + (\angle MCH - \angle ACH) \\ &= 30 + (60 - 45) \\ &= \mathbf{45}\end{aligned}$$

$\triangle$CHK と $\triangle$BCK の面積比は

$$\triangle CHK : \triangle BCK = HA : AB$$

HL:LC=HA:AB より，AL//BC であるから $\triangle$HAL と $\triangle$HBC は相似．よって

$$\frac{\triangle HAL}{\triangle HBC} = \left(\frac{HA}{HB}\right)^2 = \left(\frac{HC}{HB}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

これより，$\triangle$HAL:$\triangle$HBC=1 : **3**

【第 5 問】

【解答】

プログラムなし