【第 1 問】

【解答】

1 (1) まず

$$y = -x^2 + (2a-5)x - 2a^2 + 5a + 3$$
$$= -\left(x - \frac{2a-5}{2}\right)^2 + \frac{-4a^2+37}{4}$$

◀ 平方完成

よって，グラフ C の頂点の座標は $\left(\dfrac{2a-\mathbf{5}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{-4a^2+\mathbf{37}}{4}\right)$ である．

(2) グラフ C は上に凸の放物線だから，x 軸と異なる 2 点で交わるためには，頂点の y 座標が正であればよい．したがって

$$\frac{-4a^2+37}{4} > 0$$
$$\Leftrightarrow\ -\frac{\sqrt{\mathbf{37}}}{\mathbf{2}} < a < \frac{\sqrt{\mathbf{37}}}{\mathbf{2}} \quad \cdots\cdots ①$$

である．

◀ 判別式 D を考えて

$$D > 0$$
$$\Leftrightarrow\ (2a-5)^2 + 4(-2a^2+5a+3) > 0$$
$$\Leftrightarrow\ -4a^2 + 37 > 0$$
$$\Leftrightarrow\ -\frac{\sqrt{37}}{2} < a < \frac{\sqrt{37}}{2}$$

でもよい．

(3) グラフ C と x 軸との 2 つの交点の x 座標は

$$-x^2 + (2a-5)x - 2a^2 + 5a + 3 = 0$$

を解いて

$$x = \frac{2a-5 \pm \sqrt{-4a^2+37}}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

である．

また，a は ① を満たす整数なので，$a = \pm 3,\ \pm 2,\ \pm 1,\ 0$ である．

これらを ② に代入して調べると，$a = \mathbf{\pm 3}$ のときだけ，② は整数となる．よって，交点 x の座標は $x = \mathbf{-5},\ \mathbf{-6}$ である．

2 (1) a，b が等しければ $u = 1$ なので，$u = 1$ となる a，b の組み合わせは

$$(a,\ b) = (1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),$$
$$(4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$$

の 6 通りである．

目の出方は全部で 36 通りなので

$$P(u=1) = \frac{6}{36} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

(2) $u > 1$ となるのは，$a > b$ となるときである．それは

$$(a,\ b) = (2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 1),\ (6,\ 2),\ (6,\ 3),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5)$$

のときである．よって

$$P(u > 1) = \mathbf{\frac{5}{12}}$$

(3) $u = 1$ となるのは (1) より 6 通り
$u = 2$ となるのは $(2,\ 1),\ (4,\ 2),\ (6.\ 3)$
$u = 3$ となるのは $(3,\ 1),\ (6,\ 2)$
$u = 4$ となるのは $(4,\ 1)$
$u = 5$ となるのは $(5,\ 1)$
$u = 6$ となるのは $(6,\ 1)$
$u \geqq 7$ はない
よって

$$P\text{（}u\text{ が整数）} = \frac{14}{36} = \mathbf{\frac{7}{18}}$$

(4) P が奇数となるのは，(3) より $u = 1,\ 3,\ 5$ の 9 通り．よって

$$P(u\text{ が奇数}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

P が偶数の場合は，(3) より

$$P(u = 2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$
$$P(u = 4) = \frac{1}{36}$$
$$P(u = 6) = \frac{1}{36}$$

よって，T の期待値は

$$E(T) = 2 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{25}{36}}$$

【第 2 問】

【解答】

1. (1) A を B で実際に割ると

$$Q = x + (m + \mathbf{2})$$
$$R = (2m + n + \mathbf{5})x + (3m + n + \mathbf{3})$$

となる．また，$x = 1 + \sqrt{2}$ のとき

$$B = (1 + \sqrt{2})^2 - 2(1 + \sqrt{2}) - 1 = \mathbf{0}$$

である．さらにこのとき，$B = 0$ より

$$A = (2m + n + 5)(1 + \sqrt{2}) + 3m + n + 3 = -1$$

であるから，整数になるためには，$(1 + \sqrt{2})$ にかかる係数が 0 でなければならない．よって

$$\begin{cases} 2m + n + 5 = 0 \\ 3m + n + 3 = 0 \end{cases}$$

これを解くと，$m = \mathbf{1}$，$n = \mathbf{-7}$ である．

(2) x が奇数だと，$x^3 + 1$ は必ず偶数，$2m$ も偶数，さらに，$nx + n = n(x + 1)$ も偶数である．
よって，与えられた命題を満たすためには，mx^2 が偶数になればよい．
したがって，m **が偶数**であることが x がどのような奇数であっても A の値が常に偶数であるための必要十分条件である．

2. 円 O の半径を r とし，△AOP に余弦定理を用いて

$$2^2 = r^2 + (\sqrt{6})^2 - 2r \cdot \sqrt{6}\cos 45^\circ$$
$$\Leftrightarrow\ r^2 - 2\sqrt{3}r + 2 = 0$$

これを解いて，$r = \mathbf{\sqrt{3} \pm 1}$ である．$\angle\mathrm{AOP} = 45^\circ$ より $\angle\mathrm{AOB} = 90^\circ$ であり，また OA=OB だから △AOB は，直角二等辺三角形である．
よって

$$\mathrm{AB} = \sqrt{2}r = \mathbf{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

また，$\angle\mathrm{OAB} = 45^\circ$ より $\angle\mathrm{BAC} = 180^\circ - 45^\circ = \mathbf{135^\circ}$
ここで，$\mathrm{OC} = t$ とする．
△COP に余弦定理を用いて $t = \sqrt{3} \pm 1$ となる．ここ

で，$t > r$ より $t = \sqrt{3} + 1$ となる．

$$\mathrm{AC} = t - r = (\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} - 1) = 2$$

以上をもとに，△ABC に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \cos 135^\circ \\ &= (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + 2^2 - 2(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 8\end{aligned}$$

これを解いて

$$\mathrm{BC} = \sqrt{8} = \mathbf{2\sqrt{2}}$$

【第 3 問】

【解答】

(1) 初項を a，公比を r とすると

$$a_1 + a_2 = a + ar = 32 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$
$$a_4 + a_5 = ar^3 + ar^4 = 864 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

なので

$$② \Leftrightarrow r^3(ar + a) = 864$$
$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{864}{32} = 27$$
$$\Leftrightarrow r = 3$$

◀ ① を使った.

これを ①に代入して，$a + 3a = 32 \Leftrightarrow a = 8$ となる.
よって，$a_n = \mathbf{8 \cdot 3^{n-1}}$ である.

$$\sum_{k=1}^{n} ak + 4k - 2 = \sum_{k=1}^{n} 8 \cdot 3^{k-1} + 4k - 2$$
$$= 8 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n$$
$$= \mathbf{4 \cdot 3^n + 2n^2 - 4}$$

(2) $9 \div 37 = 0.243243243 \cdots\cdots$
243 の繰り返しなので，$b_n + p = b_n$ となる最小の P は **3** である．また，これは 2, 4, 3, 2, 4, 3, 2, 4, 3 $\cdots\cdots$ を 33 回繰り返すので

$$\sum_{k=1}^{100} b_k = 2 \cdot 34 + 4 \cdot 33 + 3 \cdot 33 = \mathbf{299}$$

【第 4 問】

【解答】

(1) E は BC を 1 : 3 に内分するので

$$\mathrm{EC} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

△ECD に三平方の定理を用いて

$$\mathrm{ED} = \sqrt{\mathrm{EC}^2 + \mathrm{CD}^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2} = \mathbf{\frac{5}{4}}$$

である．よって

$$\mathrm{EF} = \mathrm{ED} - \mathrm{DF} = \frac{5}{4} - 1 = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

△GBE と △GFE において，GH が円 D の F における接線なので，∠GBE ＝ 90°，∠GFE ＝ 90°，GE は共通である．

$$\mathrm{BE} = \frac{1}{4}\mathrm{BC} = \frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ①$$

より BE = **FE** である．よって，△GBE ≡ △GFE である．

ゆえに，∠BGE = ∠**AGE** となる．

一方，∠GBE = 45° = ∠**EBI** である．

(2) GA = GF = GB なので，G は AB の中点である．I は ∠GBH = 90° の直角三角形 BGH の内心であるから，内接円の半径を r とすると，JI = **JB** = r である．
さらに，JI // BE だから，GB : BE = **GJ** : JI ⋯⋯ ②
である．
また，G は AB の中点なので，GB = $\frac{1}{2}$ であり，GJ = GB − JB = $\frac{1}{2} - r$ である．これらの値と ① を ② に代入して

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - r : r$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}r = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}r$$

$$\Leftrightarrow\ r = \mathbf{\frac{1}{6}}$$