【第 1 問】

【解答】

〔1〕

$$y = -2x^2 + ax + b \quad \cdots\cdots \text{①}$$
$$= -2\left(x^2 - \frac{a}{2}x\right) + b$$
$$= -2\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + b - (-2)\left(\frac{a}{4}\right)^2$$
$$= -2\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{8} + b$$

◂ 平方完成

よって，頂点の座標は $\left(\frac{a}{\mathbf{4}}, \frac{a^2}{\mathbf{8}} + b\right)$ である．

点 $(3, 8)$ を通るので $x = 3$, $y = 8$ を ① に代入して

$$-8 = -2\cdot 9 + 3a + b$$
$$\Leftrightarrow 10 = 3a + b$$
$$\Leftrightarrow b = \mathbf{-3}a + 10 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

(1) 放物線 C が x 軸と接するためには，頂点の y 座標が 0 になればいいので

$$\frac{a^2}{8} + b = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{8} - 3a + 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow a^2 - 24a + 80 = 0$$
$$\Leftrightarrow (a-4)(a-20) = 0$$
$$\Leftrightarrow a = \mathbf{4},\ \mathbf{20}$$

◂ ② を使った

となる．

$a = 4$ のとき，頂点の座標は $(1, 0)$

$a = 20$ のとき，頂点の座標は $(5, 0)$

であるから，$a = 20$ のときの放物線 C は $a = 4$ の放物線 C を x 軸方向に $5 - 1 = \mathbf{4}$ だけ平行移動したものである．

(2) $f(a) = \frac{a^2}{8} - 3a + 10$ とおくと

$$f(a) = \frac{1}{8}(a^2 - 24a) + 10$$
$$= \frac{1}{8}(a-12)^2 + 10 - \frac{1}{8}\cdot 12^2$$
$$= \frac{1}{8}(a-12)^2 + 10 - 18$$
$$= \frac{1}{8}(a-12)^2 - 8$$

◂ 平方完成

よって，C の頂点の y 座標は $a = \mathbf{12}$ のとき，最小値 $\mathbf{-8}$ をとる．

〔2〕 (1) 8 個の頂点から 3 つの頂点を選ぶと 3 角形に対応するので，できる三角形の数は

$$ {}_8\mathrm{C}_3 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = \mathbf{56} $$

となる．

できる三角形の種類は，3 辺の長さが

(a) $\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$

(b) 1，1，$\sqrt{2}$

(c) 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$

の **3** 種類である．

(2) (b) のタイプ，すなわち立方体から 6 つの面を作る正方形の 4 点の中から 3 点を選ぶようにすればいいので

$$ \frac{{}_4\mathrm{C}_3\cdot 6}{56} = \mathbf{\frac{3}{7}} $$

(a) のタイプ，すなわち 1 つの頂点の周りを囲むように点を選べばいいので，できる正三角形の数は頂点の数と 8 個と同じである．よって

$$ \frac{8}{56} = \mathbf{\frac{1}{7}} $$

(3) (c) のタイプができる確率は余事象を考えて，$1 - \frac{1}{7} - \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$ である．また，(a) のタイプの面積は $\frac{\sqrt{3}}{2}$，(b) タイプのときは $\frac{1}{2}$，(c) のタイプのときは $\frac{\sqrt{2}}{2}$ であるので

X	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$

よって，面積の期待値 $E(X)$ は

$$ \begin{aligned} E(X) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{7} \\ &= \mathbf{\frac{3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{14}} \end{aligned} $$

【第 2 問】

【解答】

〔1〕(1) (a) 割り算を実行すると

$$A = \underbrace{(x^2-3x+2)}_{\text{商}}(x+p+3) + \underbrace{(3p+q+7)x-2p+r-6}_{\text{余り}}$$

である．商が $x-1$ と等しいので

$$p+3=-1 \Leftrightarrow p = \mathbf{-4}$$

(b) 条件より，$-2p+r-6=0$ なので，$r = \mathbf{2p+6}$ である．

(c) 条件より

$$\begin{aligned} & x+p+3 \\ &= (3p+q+7)x-2p+r-6 \end{aligned}$$

である．係数を比較して

$$\begin{cases} 1 = 3p+q+7 & \cdots\cdots ① \\ p+3 = -2p+r-6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

である．① + ② より

$$\begin{aligned} & p+4 = q+r+p+1 \\ \Leftrightarrow\ & q+r = \mathbf{3} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & (|a+b|+|a-b|)^2 \\ &= (a+b)^2 + 2|a+b||a-b| + (a-b)^2 \\ &= 2\left(a^2+b^2+|\boldsymbol{a^2-b^2}|\right) \quad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

◀ $|a \pm b|^2 = (a \pm b)^2$

$(|a+b|+|a-b|)^2 = 4a^2$ を ③ に代入すると

$$\begin{aligned} & 4a^2 = 2\left(a^2+b^2+|\boldsymbol{a^2-b^2}|\right) \\ \Leftrightarrow\ & 2a^2 = a^2+b^2+|a^2-b^2| \\ \Leftrightarrow\ & a^2-b^2 = |a^2-b^2| \end{aligned}$$

よって，求める必要十分条件は $\boldsymbol{a^2 \geqq b^2}$.

$a^2 \geqq b^2$ でないとき，$|a^2 - b^2| = b^2 - a^2$ なので

$$2\left(a^2 + b^2 + |a^2 - b^2|\right) = \mathbf{4b^2}$$

となる.

$$\frac{1}{2}(|a+b| + |a-b|) = b \quad \cdots\cdots ④$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4}(|a+b| + |a-b|)^2 = b^2$$
$$\Leftrightarrow (|a+b| + |a-b|)^2 = 4b^2$$

よって，まず $a^2 \leqq b^2$ が必要.

ところで，④ の左辺は正なので右辺も正．よって，$b > 0$ も必要.

以上から, 求める条件は $|\boldsymbol{a}| \leqq \boldsymbol{b}$ である.

〔2〕余弦定理より

$$\cos A = \frac{5^2 + \left(4 + \sqrt{3}\right)^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2}{2 \cdot 5\left(4 + \sqrt{3}\right)}$$
$$= \frac{32 + 8\sqrt{3}}{10\left(4 + \sqrt{3}\right)} = \mathbf{\frac{4}{5}}$$

である．よって

$$\sin A = \sqrt{1 - (\cos A)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

であるので，$\triangle$ABC の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \cdot \sin A$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \left(4 + \sqrt{3}\right) \cdot \frac{3}{5}$$
$$= \frac{3}{2}\left(4 + \sqrt{3}\right) = \mathbf{\frac{12 + 3\sqrt{3}}{2}}$$

である.

ここで右欄外のように H と I をおくと，BD と AC は平行なので, BH = DI である．よって，台形 ABCD の面積は等脚台形である．したがって，BC = AD なので，BD = x と

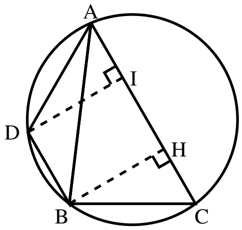
すると，トレミーの定理より

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}+\mathrm{BD}\cdot\mathrm{CA}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}$$

$$\Leftrightarrow\ \left(2\sqrt{3}\right)^2+x\left(4+\sqrt{3}\right)=25$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{13}{4+\sqrt{3}}=\mathbf{4-\sqrt{3}}$$

◀



よって，台形 ABCD の面積 S_2 は

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\left(4+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\left(4-\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\mathbf{12}$$

◀ 余弦定理より，$\cos C=\frac{1}{2}$ なので $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり, $\sin D=\frac{\sqrt{3}}{2}$ である

【第 3 問】

【解答】

(1) 公比は $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるので，第 6 項を b_6 とすると

$$b_6 = 18\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 = \mathbf{\frac{-2\sqrt{3}}{3}}$$

奇数項のみの数列は初項が 18，公比が $\dfrac{1}{3}$ の数列と考えられるので，求める和 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{8} 18\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{18\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \mathbf{\frac{6560}{243}} \end{aligned}$$

◀ 等比数列の和

(2) 第 1 区画から第 n 区画までの区画に含まれる項の個数を c_n とすると，c_{20} は

$$c_{20} = 1+2+3+\cdots+20 = \frac{20\cdot 21}{2} = \mathbf{210}$$

である．

また，$c_{21} = c_{20} + 21 = 231$ なので，$c_{20} < 215 < c_{21}$ である．よって，a_{215} は第 21 区画に含まれるので，$a_{215} = \mathbf{21}$ である．

第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の総和 S_2 は

$$S_2 = \sum_{k=1}^{20} k^2 = \frac{20\cdot 21\cdot 41}{6} = \mathbf{2870} \quad \cdots\cdots ①$$

◀ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

である．

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq$ となる最小の自然数 n を p とすると，a_p は第 21 区画に含まれるので

$$\begin{aligned} 3000 - S_2 &= 3000 - 2870 \\ &= 130 = 21\cdot 6 + 4 \end{aligned}$$

であるから，a_p は第 21 区画の前から 7 つ目の数であると分かる．よって，$p = c_{20} + 7 =$ **217** である．

【第 4 問】

【解答】

(1) G（傍心）は外角の 2 等分線の交点であるので

$$2\angle\mathrm{EAG} = \angle\mathrm{E}\mathbf{AC}$$

である．また, ∠EAC は ∠CAB の外角なので

$$\angle\mathrm{EAC} = \angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{B}\mathbf{CA}$$

となる．また, △ABC は二等辺三角形なので

$$\angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{BCA} = 2\angle\mathrm{ABC}$$

である．よって，∠EAG = ∠ABC である．したがって，直線 **AG** と直線 BF は平行である．

円の中心から接点に下ろした線と接線は直角に交わるので

$$\angle\mathrm{ADG} = \angle\mathrm{GFD} = \mathbf{90}^\circ$$

である．さらに，AG ≒ GF なので，四角形 ADFG は**長方形**である．

(2) 三平方の定理より，$\mathrm{AD} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \boldsymbol{\sqrt{21}}$ である．

角の二等分線定理より，AI : ID = 5 : 7 なので

$$\mathrm{AI} = \sqrt{21} \cdot \frac{5}{7} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{21}}{7}}$$

である．

△ABG は二等辺三角形なので

$$\mathrm{AG} = \mathrm{AB} = \mathbf{5}$$

である．よって，△AIG に三平方の定理の定理を用いて

$$\mathrm{IG} = \sqrt{5^2 + \frac{5^2 \cdot 21}{7^2}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{70}}{7}}$$